Análise combinatória

1. Introdução

A análise combinatória tem por objetivo resolver problemas de contagem. Muitas vezes é complicado realizarmos contagens segundo critérios de ordenação, repetição ou agrupamento; porém, com o auxílio da análise combinatória, esse procedimento torna-se relativamente simples.

O estudo da combinatória é de grande interesse nos mais diversos campos:

- na química estuda-se as possíveis uniões entre átomos;
- o diretor de um colégio faz várias combinações para montar a grade horária de aulas;
- a lingüística estuda os possíveis significados de símbolos de uma língua desconhecida;
- a polícia faz combinações na tentativa de decifrar gírias e códigos utilizados por bandidos;
- o DETRAN calcula o número de placas de automóveis disponíveis em determinado Estado;
- o estudo da probabilidade utiliza-se com frequência da combinatória, como será visto mais adiante.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

2. Fatorial

Antes de continuarmos no estudo da combinatória, precisamos ver o que é fatorial.

Seja n um número com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Definimos o fatorial do número n pelo símbolo n! tal que

$$n! = n.(n-1).(n-2). \ldots .3.2..1$$

Por definição,

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Exemplos:

6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

3! = 3.2.1 = 6

A partir da definição, podemos desenvolver técnicas de simplificação de expressões que envolvam fatoriais. Inicialmente, note que

$7! = 7.6.(5.4.3.2.1) = 7.6.5!$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Veja alguns exemplos de simplificação de expressões numéricas envolvendo fatorial:

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 6.5 = 30$$

$$\frac{16!}{12!.4!} = \frac{16.15.14.13.\cancel{12!}}{\cancel{12!}.4.3.2.1} = \frac{16.15.14.13}{4.3.2.1} = 1820$$

Inclusive, podemos simplificar expressões algébricas:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = (n+3)(n+2)$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{n.\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

3. Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é o caso mais simples da análise combinatória. Consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada tipo de ocorrência desde que essas ocorrências ocorram de forma independente. Veja os exemplos a seguir.

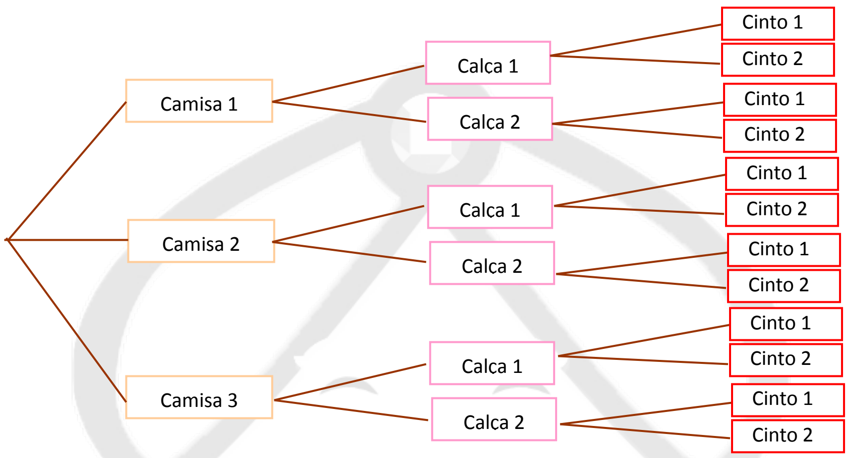
Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 1

Vamos começar com um caso bastante simples: uma pessoa tem 3 camisas, 2 calças e 2 cintos diferentes. De quantas maneiras essa pessoa pode se vestir?

Uma forma de resolver esse problema é utilizando a chamada “árvore de possibilidades”:



Percebemos que há 12 formas dessa pessoa se vestir. Porém, note que tal método seria bastante trabalhoso e demorado caso tivéssemos 10 camisas, 6 calças e 5 cintos, por exemplo.

Precisamos achar um modo mais prático de se obter tal resultado. Observando com cuidado a árvore, percebemos que temos, inicialmente, 3 camisas. Para cada camisa, há 2 possibilidades. Aqui, já temos 2.3 = 6 possibilidades. Porém, para cada uma dessas 6 possibilidades, há mais 2 formas de se vestir, totalizando 6.2=12 maneiras. Em resumo, se um acontecimento ocorre em n situações sucessivas e independentes, sendo que na 1ª situação ocorre de a_1 maneiras, a 2ª de a_2, ..., a nª de a_n, então o total de possibilidades é dado por

$$a_1.a_2. \ldots . a_n$$

Em nosso exemplo, calculamos 3.2.2 = 12. Observação: no caso citado logo após a árvore, em que temos 10 camisas, 6 calças e 5 cintos, teríamos 10.6.5=300 formas diferentes de se vestir.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 2

Qual o número de linhas telefônicas móveis (celulares) disponíveis da cidade de São Paulo?

Observação: na época da criação deste exercício, os números dos telefones celulares tinham 8 dígitos e iniciavam com 7, 8 ou 9.

Sabemos que os números de telefones são formados por 8 algarismos e que os celulares começam por 7, 8 ou 9. Assim, esquematicamente, o número de possibilidades para cada algarismo é:

3	10	10	10	10	10	10	10

Para o 1° algarismo da esquerda há 3 possibilidades (7, 8 ou 9). Para os 7 algarismos restantes há 10 possibilidades para cada um (0,1,2,...,8,9). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, teremos:

3.10.10.10.10.10.10.10 = 3.10^7 = 30 000 000 = 30 milhões de linhas móveis.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4. Permutação sem repetição

Este é o primeiro caso que estamos vendo que trata de métodos de contagem com a utilização de uma fórmula. A compreensão desta situação bem como as seguintes dar-se-á através de exemplos de aplicação.

Suposições:

- não há elementos repetidos;
- a ordem importa;
- todos os elementos são utilizados de uma só vez.

A permutação de n elementos é dada por

$$P_n = n!$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Cálculo de Permutação em calculadoras científicas

Se você quiser calcular uma permutação utilizando alguma calculadora científica, verifique se ela possui um botão (ou uma função) geralmente representada por **n!** ou por **x!** .

No vídeo a seguir (clique no botão) você verá como calcular a permutação usando uma calculadora científica da Casio.

Exemplo 3

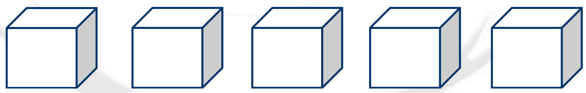
Um caso clássico de permutação é aquele que envolve anagramas. Um anagrama é uma sequência de letras que se transpõem e que pode ou não ter sentido. Consideremos a palavra LIVRO. São anagramas dessa palavra:

LIVRO
IVROL
LROVI
OIRVL
.
.
.

Ao todo, quantos anagramas temos? Vamos utilizar o PFC. Imaginemos que temos 5 bolas, cada uma com uma letra:

L I V R O

Temos, também, 5 caixas vazias onde serão colocadas cada uma das bolas (1 bola em cada caixa):



Para a 1ª caixa temos 5 possibilidades (qualquer uma das 5 bolas). Colocada essa bola, restam apenas 4 para a 2ª caixa. Depois, restam 3 bolas para a 3ª caixa e assim por diante.

Pelo PFC teremos 5.4.3.2.1 = 120 anagramas. Isso corresponde exatamente ao caso de permutação de 5 elementos: $P_5 = 5! = 120$. Note que as suposições foram satisfeitas: não há letras repetidas, todas as letras foram utilizadas simultaneamente e a ordem importa, pois LIVRO $\neq$ IVROL.

Exemplo 4

De quantas maneiras diferentes podemos colocar 4 pessoas para posar, lado a lado, para uma foto?

As suposições sobre a utilização da permutação sem repetição são satisfeitas e teremos, portanto,

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$ fotos possíveis.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

5. Permutação com repetição

Suposições:

- a ordem importa;
- temos n elementos dos quais há r_1 elementos repetidos do tipo 1, r_2 elementos repetidos do tipo 2, ..., r_k elementos repetidos do tipo k (k=1,2,3...,n).

Neste caso, o número de permutações é dado por:

$$P = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots\ldots r_k!}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 5a

Qual o número de anagramas da palavra ESTATISTICA (ignorando a acentuação)?

Temos 11 letras das quais 2 são S, 2 são A, 2 são I e 3 são T. Ignoramos a acentuação pois, caso contrário, as letras I e Í seriam diferentes (devido ao acento). O número de anagramas é:

$$P = \frac{11!}{2!.2!.2!.3!} = \frac{11.10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.1.2.1.2.1.3!} = 831600 \text{ anagramas.}$$

A ideia desse último cálculo é relativamente simples. Para entender melhor, vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 5b

Seja a palavra MATANÇA (7 letras, 3 repetidas). Ao todo, teríamos P7 = 7! = 5040 anagramas (supondo a não repetição). Fixemos o anagrama TANAMAÇ. Caso as letras "A" fossem distintas, teríamos, para as demais letras fixadas, P3 = 3! = 6 anagramas:

TANAMAÇ
TANAMAÇ
TANAMAÇ
TANAMAÇ
TANAMAÇ
TANAMAÇ

Porém, tais letras são indistinguíveis. Ou seja, para cada disposição das letras, há 6 anagramas idênticos. Logo, o número de anagramas diferentes da palavra MATANÇA é

$$P = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$$

6. Arranjo simples

Suposições:

- não há elementos repetidos;
- a ordem importa.

O arranjo de n elementos tomados p a p é dado por

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Cálculo de Arranjo em calculadoras científicas

Se você quiser calcular um arranjo utilizando alguma calculadora científica, verifique se ela possui um botão (ou uma função) geralmente representada, geralmente, por **nPr**.

No vídeo a seguir (clique no botão) você verá como calcular o arranjo usando uma calculadora científica da Casio.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 6

Uma pessoa dispõe dos símbolos ∇ 💣 ♦ ♣ ♥ e quer montar códigos utilizando 3 destes 5 símbolos de modo que não haja repetições de símbolos em cada código. Quantos códigos essa pessoa pode formar?

A ordem dos símbolos importa. Assim, temos um arranjo de 5 elementos tomados de 3 em 3:

$$A_{5,3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5.4.3.2!}{2!}=5.4.3=60$$ códigos diferentes.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 7

Numa sala com 10 pessoas, vai-se selecionar aleatoriamente 4 pessoas para se colocar numa fila de atendimento. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Novamente, a ordem importa, pois ser o 1° da fila é diferente de ser o último. Assim:

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 5040 \text{ filas diferentes.}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Observação importante

Calculemos o arranjo de n elementos tomados n a n (é como se tivéssemos n pessoas numa sala e fossemos selecionar n pessoas – ou seja, todas – para colocá-las numa fila):

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Ou seja, $A_{n,n} = P_n$. Logo, **a permutação sem repetição é um caso particular de arranjo**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

7. Combinação

Suposições:

- não há elementos repetidos;
- a ordem não importa.

A combinação de n elementos tomados p a p é dada por

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Cálculo de Combinação em calculadoras científicas

Se você quiser calcular uma combinação utilizando alguma calculadora científica, verifique se ela possui um botão (ou uma função) geralmente representada, geralmente, por **nCr**.

No vídeo a seguir (clique no botão) você verá como calcular a combinação usando uma calculadora científica da Casio.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 8

Seja um grupo de 10 funcionários de uma empresa. Deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas. Quantas comissões diferentes podem ser formadas?

Note que a ordem não importa, visto que, escolhendo as pessoas A,B,C e D ou B,D,C e A estamos formando a mesma comissão (o que importa é que as 4 pessoas foram escolhidas e não a ordem com que elas foram escolhidas). Utilizaremos a combinação de 10 elementos tomados 4 a 4:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!.(10-4)!} = \frac{10!}{4!.6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!} = 210 \text{ comissões distintas.}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 9

Suponhamos, agora, que tenhamos, dentre os 10 funcionários, 6 homens e 4 mulheres. Queremos formar uma comissão com 3 homens e 2 mulheres. Neste caso, vamos iniciar calculando o número de trios masculinos que podemos formar:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!.(6-3)!} = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{3.2.1.\cancel{3!}} = 20$$

E o número de duplas femininas:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{2.1.\cancel{2!}} = 6$$

Pelo PFC, teremos 20.6 = 120 comissões. Justificativa do uso do PFC: para cada trio masculino podemos formar comissões com qualquer uma das duplas femininas, ou seja, o trio nº 1 masculino pode-se juntar a uma das 6 duplas femininas; o trio nº 2 masculino pode se juntar a uma das 6 duplas femininas e assim por diante.

Até o momento demos alguns exemplos simples utilizando a análise combinatória com o objetivo de entendermos os usos e diferenças entre os casos de Análise Combinatória. Vale ressaltar que os métodos aqui apresentados não são os únicos existentes. Não trataremos deles aqui, mas é bom que se saiba sobre suas existências: arranjos com repetições, combinações com repetições, permutações circulares, dentre outros.

Agora, daremos alguns exemplos práticos e um pouco mais sofisticados envolvendo os casos de análise combinatória vistos.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 10: cardápio de um restaurante

Em um determinado restaurante, o gerente deseja fazer uma propaganda informando aos consumidores a grande variedade de combinações de pratos que seu cliente poderá fazer. Assim, ele deseja calcular o número de possibilidades sabendo-se que o cliente escolherá uma entrada dentre 8 possíveis, um prato principal dentre 15 diferentes e uma sobremesa dentre 10 disponíveis.

Neste caso, utilizaremos o princípio multiplicativo, visto que cada entrada poderá ser escolhida com qualquer um dos 15 pratos principais que por sua vez, cada um deles, podem acompanhar qualquer uma das 10 sobremesas.

O número total de combinações é: 8 . 15 . 10 = 1200 possibilidades.

Assim, na propaganda, o gerente poderá informar aos seus clientes que o restaurante possui ao todo 1200 refeições diferentes.

Exemplo 11: placas de carros

Suponhamos que as placas de carros com iniciais B, C e D pertençam à cidade de São Paulo (ou seja, ABC 1234 não pertence, por exemplo). Na elaboração de placas, o Detran utiliza-se de todas as letras do alfabeto (incluindo K, Y e W) o que totaliza 26 letras. Suponha, ainda, que nenhuma placa tenha quatro dígitos iguais a zero, ou seja, não existe uma placa do tipo BBC 0000. Pode haver repetição de número e letras. Quantos carros poderão ser emplacados supondo-se a utilização de todas as combinações possíveis em São Paulo?

Utilizaremos, inicialmente, o princípio multiplicativo. A seguir representaremos por quadrados os "lugares" onde podemos colocar as letras e números (os 3 primeiros são letras e os demais, números). O valor dentro dos quadrados indica o total de possibilidades para cada posição.

3	26	26		10	10	10	10

Note que no primeiro quadrado há 3 possibilidades, visto que estão disponíveis apenas as iniciais B, C e D. Em azul temos os números. São dez possibilidades, pois podemos usar qualquer um dos algarismos de 0 a 9.

Pelo princípio multiplicativo teremos: 3.26.26.10.10.10.10 = 20280000 possibilidades.

Porém, devemos lembrar que não existem placas do tipo # # # 0 0 0 0. Assim, calcularemos o número de placas que levam 4 "zeros":

3	26	26		0	0	0	0

Pelo princípio multiplicativo teremos 3.26.26 = 2028 placas desse tipo.

Assim, o número de placas disponibilizados pelo Detran é

20 280 000 – 2028 = 20 277 972 placas.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 12: senhas bancárias

Atualmente é cada vez mais comum o uso de serviços bancários via Internet. Porém, também é cada vez maior o número de hackers que tentam invadir sistemas bancários para desviar dinheiro. Assim, a preocupação com a segurança também aumenta. Além de campanhas preventivas do tipo “jamais divulgue sua senha a um estranho”, “o banco não solicita sua senha por e-mail”, “troque sua senha periodicamente”, alguns bancos tem feitos caríssimos investimentos para melhorar a segurança dos internautas. Uma delas é o aumento do número de dígitos que compõe a “senha eletrônica” quando comparada a “senha do cartão”.

Muitos bancos utilizam para a senha do cartão 4 dígitos numéricos, o que nos daria um total de aproximadamente 10.10.10.10 = 10 000 senhas diferentes. Digo “aproximadamente” pelo fato que muitos bancos não aceitam senhas sequenciais como 2222 ou que contenha data de aniversário ou repetições óbvias do tipo 1212.

Já na Internet, temos bancos que utilizam 8 dígitos numéricos para compor a senha. Neste caso temos 108 = 100 000 000 de combinações diferentes aproximadamente (novamente, devido aos motivos citados). Neste caso, é claro que a segurança é maior, pois são 99 990 000 números a mais. Porém, mais recentemente, outros bancos passaram a se utilizar de 8 caracteres, o que permite incluir letras e números. Considerando, ainda, que o sistema faz uma distinção entre letras maiúsculas e minúsculas teremos um total de, nada mais, nada menos, que

628 = 218 340 105 584 896 ≅ 218 trilhões de senhas diferentes.

Assim, seria muita, mas muita sorte mesmo, alguém “adivinhar” sua senha ou alguém acessar uma conta bancária de outra pessoa “por engano”.

Como chegamos ao número acima?

Inicialmente pense que você tem 8 quadrados para alojar dentro deles números ou letras (maiúsculas e/ou minúsculas). Dessa forma, teremos, para cada dígito 10 número (de 0 à 9), 26 letras maiúsculas (de A à Z) e outras 26 minúsculas. Como 10+26+26 = 62 então:

62	62	62	62	62	62	62	62

Daí usamos, mais uma vez, o princípio multiplicativo obtendo 62^8 senhas diferentes.

Com tudo isso, será que realmente estamos seguros...?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 13: gincana

Numa gincana de televisão, o apresentador possui 5 cartelas contendo uma sílaba de uma palavra. O jogador deve adivinhar que palavra é essa conhecendo-se algumas de suas sílabas.

Neste caso, é claro, muitas das possibilidades não serão consideradas pelo jogador devido às regras da gramática portuguesa. Então, o jogador não necessitaria saber todas as combinações possíveis para adivinhar qual a palavra que contém as sílabas:

TE	TO	SA	AR	NA

Neste caso a palavra é ARTESANATO. Fácil, não?

Porém, suponhamos que a palavra apresentada seja desconhecida ou, pelo menos, pouco comum. Por exemplo:

CI	DA	GA	NU	DE

Neste caso, talvez fosse interessante o jogador manipular os cartões colocando-se nas mais diversas ordens até que obtivesse a palavra procurada. Assim, algumas das possibilidades seriam:

CI-DA-GA-NU-DE
DA-NU-GA-CI-DE
DA-CI-GA-DE-NU
NU-DA-CI-GA-DE
DE-NU-GA-CI-DA

E assim por diante. Visto que ele está colocando os cartões em ordens diferentes e cada cartão é diferente do outro e, ainda, a ordem faz diferença, notamos que estamos num caso de permutação.

O número total de combinações que o jogador poderá fazer até achar a palavra é calculado por:

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ anagramas.

Um anagrama é uma ordenação qualquer das letras de uma palavra. Podemos dizer que, neste caso, não seria tão fácil, nem tão rápido, acharmos a palavra desejada.

E você descobriu qual palavra é? A resposta é NUGACIDADE que, segundo o dicionário Aurélio, significa futilidade, nulidade, insignificância.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 14: corrida

Numa corrida de automóveis, largam 15 carros. Porém, apenas os seis primeiros serão premiados. Diversas pessoas fizeram apostas e ganha aquela que conseguir acertar as 6 primeiras colocações exatamente na ordem de chegada (ou seja, não basta dizer apenas quais foram os seis primeiros, mas é preciso acertar quem foi o primeiro, o segundo e assim por diante).

Neste caso, podemos verificar quantos jogos seriam possíveis fazer, ou melhor, quantos resultados diferentes a corrida poderia ter. Deve estar claro que a ordem de chegada é importante. Como apenas os 6 primeiros são premiados, estamos trabalhando com um caso de arranjo. Assim, temos que escolher 6 pilotos de um total de 15:

$$A_{15,6} = \frac{15!}{(15-6)!} = \frac{15!}{9!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9!}{9!} = 15.14.13.12.11.10 = 3603600$$

Ou seja, há pouco mais de três milhões e meio de resultados diferentes.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 15

Quatro carros (c1, c2, c3, c4) disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?

Observe que a ordem importa, visto que chegar em primeiro lugar é diferente de chegar em terceiro. Logo, podemos utilizar um caso de arranjo:

$A_{4,3}$ = 24 “chegadas” diferentes.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 16

Os números de telefones fixos de São Paulo (DDD 11) têm 8 algarismos. Determine o número máximo de telefones que podem ser instalados, supondo-se que os números não podem começar com zero nem com um (mas podem começar – por suposição – com qualquer número de 2 a 9).

Vamos utilizar o PFC, visto que os algarismos podem ser repetidos. Note que para o primeiro algarismo só há 8 possibilidades (2, 3, ..., 9). Os demais algarismos podem ser valores de 0 a 9, ou seja, 10 possibilidades:

8	10	10	10	10	10	10	10

Pelo PFC temos: 8.10.10.10.10.10.10.10 = 80.000.000 = 80 milhões de telefones.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 17

Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico, sendo que a mesma pessoa não pode assumir mais de um cargo simultaneamente. Quantas são as possibilidades de escolha?

Novamente, utilizando o PFC temos:

Diretor = 18 possibilidades

Vice-diretor = 17 possibilidades (visto que uma pessoa já foi escolhida para diretor)

Coordenador = 16 possibilidades (pois já escolhemos um diretor e um vice)

Total de possibilidades = 18 . 17 . 16 = 4896.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 18

Resolver a equação $A_{x,\,2} = 12$.

Utilizando a fórmula de arranjo e os conhecimentos de fatoriais temos:

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 12 \Rightarrow \frac{x.(x-1).(x-2)!}{(x-2)!} = 12 \Rightarrow x.(x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -3$$

Como, pela condição de existência devemos ter $x \geq 2$, temos que S={4}.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 19

Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repeti-los?

Trabalhando com o PFC, temos as possibilidades:

6	5	4

O total de números é 6.5.4 = 120.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 20

Quantos números pares de 4 algarismos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repeti-los?

Este exemplo é muito similar ao anterior. Porém, aqui, temos que ter cautela com o zero, visto que um número nunca deve ser iniciado com zero. Porém, temos uma segunda restrição, que é o fato de o número ser par e, neste caso, ele deve terminar com 0, 2, 4 ou 6. Percebemos que o zero faz parte de duas restrições (primeiro e último algarismos). Assim, vamos considerar duas situações:

I. o número termina com zero: neste caso, o último algarismo está fixado (zero). Logo, temos 6 possibilidades para o primeiro algarismo (1,2,3,4,5 ou 6). Assim, as possibilidades serão:

6	5	4	1

Ou seja, teremos 6.5.4.1 = 120 números.

II. o número termina em 2, 4 ou 6 (três possibilidades). O primeiro algarismo não pode ser zero, restando 5 possibilidades. O segundo algarismo pode ser zero, bastando que não seja igual ao primeiro e ao último algarismos definidos. Assim:

5	5	4	3

O total de número é: 5.5.4.3 = 300.

Logo, o total de número procurado é a soma dos resultados obtidos em **I** e **II**, ou seja, 120 + 300 = 420.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 21

Resolver a equação $C_{x,2} = 15$.

$$\frac{x!}{(x-2)!.2!} = 15 \Rightarrow \frac{x.(x-1).(x-2)!}{(x-2)!.2.1} = 15 \Rightarrow \frac{x.(x-1)}{2} = 15 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = -5$$

Como a condição de existência é $x \geq 2$, temos S={6}.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 22

Quantas comissões constituídas de 3 pessoas podem ser formadas com 5 pessoas?

Note que a ordem não importa, visto que uma comissão formada pelas pessoas A, B e C ou uma comissão B, C e A representam o mesmo grupo de pessoas. Então, utilizando combinação teremos $C_{5,3}$ = 10 comissões.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 23

Em um ambiente de trabalho há 7 homens e 4 mulheres. Deseja-se formar uma comissão de 5 pessoas sendo que 3 são homens e 2 são mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

Este é uma variação do exemplo anterior. Inicialmente, calculamos o número de comissões possíveis só de homens e só de mulheres:

Homens: $C_{7,3}$ = 35

Mulheres: $C_{4,2}$ = 6

Como nossas comissões serão compostas por homens e mulheres, basta multiplicarmos os resultados: 35 . 6 = 210 comissões com cinco pessoas.

Exemplo 24

Temos um grupo de 3 homens e 5 mulheres. Deseja-se formar uma comissão de 4 pessoas sendo que deve haver pelo menos 1 homem presente. Quantas comissões podem ser formadas?

Esta é uma variação do exemplo anterior. Temos que calcular caso a caso a quantidade de homens e mulheres presentes nas comissões:

I. 1 homem e 3 mulheres: $C_{3,1} \,.\, C_{5,3} = 3 \,.\, 10 = 30$

II. 2 homens e 2 mulheres: $C_{3,2} \,.\, C_{5,2} = 3 \,.\, 10 = 30$

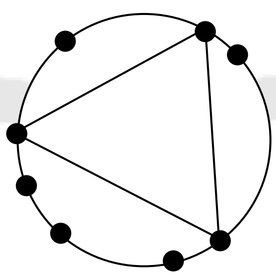
III. 3 homens e 1 mulheres: $C_{3,3} \,.\, C_{5,1} = 1 \,.\, 5 = 5$

Como a comissão será do tipo I ou tipo II ou tipo III, devemos somar os resultados obtidos: 30 + 30 + 5 = 65 comissões.

Perceba que não consideramos o caso de 4 homens e 0 mulheres, visto que havia apenas 3 homens no grupo considerado.

Exemplo 25

Sobre uma circunferência marcam-se 8 pontos. Quantos triângulos podemos construir utilizando esses pontos?



Para resolver este problema, basta observarmos que a sequência com que escolhemos três pontos quaisquer não importa. Ou seja, escolhidos três pontos, independente da ordem que fizemos a escolha, obteremos o mesmo triângulo. Logo, teremos $C_{8,3}$ = 56 triângulos possíveis.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

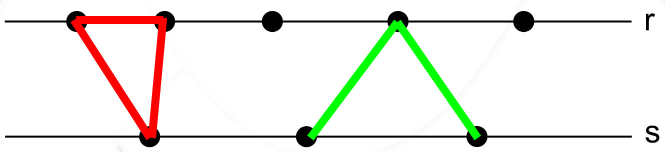
Exemplo 26

Sobre uma reta **r**, marcam-se 5 pontos e sobre uma outra reta **s**, paralela à primeira, marcam-se 3 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 quaisquer desses pontos?

É uma variação mais elaborada do exemplo anterior. Podemos utilizar dois métodos distintos para a resolução, que chamaremos aqui de método da inclusão e de método da exclusão.

Método da Inclusão

Neste método, iremos considerar apenas os casos de interesse e, ao final, somamos os resultados para obter o total de triângulos.



Note que temos duas possibilidades para a construção dos triângulos: os que possuem a base na reta **r** e um vértice na reta **s** (triângulo da esquerda) ou os que possuem a base na reta **s** e um vértice na reta **r** (triângulo da direita).

I. para os triângulos de mesmo tipo que o da esquerda, escolhemos 2 dos 5 vértices para a base e um dos 3 que correspondem ao vértice da reta s: $C_{5,2}$. $C_{3,1}$ = 10 . 3 = 30.

II. para os triângulos de mesmo tipo que o da esquerda, escolhemos 2 dos 3 vértices para a base e um dos 5 que correspondem ao vértice da reta r: $C_{3,2}$. $C_{5,1}$ = 3 . 5 = 15.

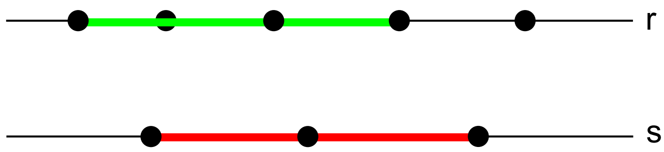
Como pode ocorrer o caso **I** ou o caso **II** teremos um total de 30 + 15 = 45 triângulos.

Método da Exclusão

Inicialmente, consideramos o número total de triângulos que podemos construir a partir de 5+3=8 pontos:

$C_{8,3}$ = 56 triângulos.

Porém, pelo fato de termos pontos colineares, devemos calcular quantos “falsos triângulos” computamos, ou seja, quantos “triângulos” formamos utilizando 3 pontos colineares:



I. na reta r temos C5,3 = 10 “falsos triângulos”.

II. na reta s temos C3,3 = 1 “falso triângulo”.

Logo, temos um total de 10+1=11 “falsos triângulos”. Assim, os possíveis triângulos que podemos construir serão 56 – 11 = 45.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 27

Qual é o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra INFINITO?

Ao todo são 8 letras, sendo 3 letras “I” e 2 letras “N”. utilizando a fórmula de permutação com repetição, teremos

$$\frac{8!}{2!.3!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{2.1.3!} = \frac{8.7.6.5.4}{2.1} = 3360 \text{ anagramas.}$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 28

Determine o número de soluções naturais da equação x+y+z=9.

Como estamos trabalhando com o conjunto dos números naturais, cada uma das incógnitas x, y e z podem assumir valores de 0 à 9. Vamos supor que cada bolinha represente uma unidade e que cada barrinha separe os valores de x, y e z da seguinte forma: a quantidade de bolinhas à esquerda da primeira barra corresponde ao valor de x; entre as duas barras correspondem ao valor de y; à direita da segunda barra correspondem ao valor de z. Exemplos:

● ●|● ● ●|● ● ● ●   x = 2 ; y = 3 ; z = 4

|● ●|● ● ● ● ● ● ●   x = 0 ; y = 2 ; z = 6

● ● ● ● ● ● ● ● ●|| x = 9 ; y = 0 ; z = 0

Dessa forma, vamos traduzir o esquema como se fosse uma palavra com letras repetidas, em que B representa “bolinha” e T representa o “traço”. As figuras anteriores seria, respectivamente, as “palavras” BBTBBBTBBBB, TBBTBBBBBB e BBBBBBBBBTT. Em resumo, o total de soluções corresponde ao número de anagramas de uma das “palavras” anteriores:

$\frac{11!}{2!.9!} = \frac{11.10.9!}{2.1.9!} \frac{11.10}{2.1} = 55$ soluções distintas.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 29

Em um acampamento há 12 pessoas e 3 barracas. De quantas maneiras podemos organizar essas pessoas de modo que fiquem exatamente 4 pessoas em cada barraca?

Inicialmente, calculamos quantos grupos distintos podemos formar na 1ª barraca: $C_{12,4}$=495. Para a segunda barraca, devemos escolher 4 pessoas dentre as 8 restantes, visto que 4 pessoas já ocupam a primeira barraca: $C_{8,4}$=70. Para a última barraca, só resta escolhermos 4 dentre as 4 pessoas que sobraram, o que nos dá, claramente, C4,4=1 grupo possível. Como queremos colocar 4 pessoas na primeira, e na segunda, e na terceira barraca, temos, pelo PFC um total de 495 . 70 . 1 = 34650 formas de organizar o grupo nas barracas.

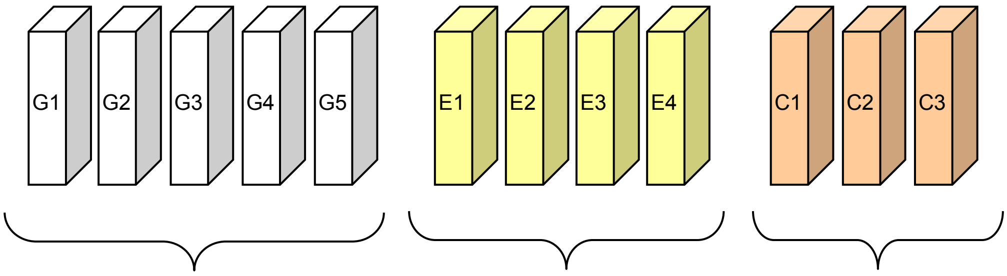
Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 30

De quantas maneiras podemos arrumar lado a lado 5 livros de Geometria, 4 de Estatística e 3 de Cálculo em uma prateleira de modo que livros de um mesmo assunto fiquem sempre juntos?

Inicialmente, vamos supor uma sequência qualquer das matérias. Por exemplo, Geometria, Estatística e Cálculo. Calculamos de quantas formas podemos organizar os livros de cada matéria separadamente.



$P_5 = 5! = 120$ $\quad$ $P_4 = 4! = 24$ $\quad$ $P_3 = 3! = 6$

Agora, consideramos a ordem com que as disciplinas aparecerão na estante, ou seja, chamando G para geometria, E para Estatística e C para Cálculo temos que a disposição GEC é diferente de CGE, por exemplo. O total de arrumações possíveis é $P_3 = 3! = 6$ para as disciplinas.

Pelo princípio multiplicativo, teremos 120 . 24 . 6 . 6 = 103680 formas de dispor esses livros na prateleira.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

10. Exercícios

1) Calcule o valor dos números fatoriais:

a) 0!
b) 1!
c) 6!
d) 7!
e) 2! + 3!
f) 1! + 4!
g) 3! – 2!
h) 0! + 1!
i) 2!3!
j) 0!5!

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{8!}{9!}$

b) $\frac{15!}{13!}$

c) $\frac{4!}{6!}$

d) $\frac{6!}{5!2!}$

e) $\dfrac{8!}{4!6!}$

f) $\dfrac{2.4!}{4!4!}$

3) Simplifique as frações:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{x!}{(x-2)!}$

c) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

d) $\dfrac{(2x+2)!}{(2x)!}$

e) $\dfrac{x!\,(x+2)!}{(x-1)!\,(x+1)!}$

f) $\dfrac{(n-1)!+(n-2)!}{n!}$

4) Determine o valor de x, de modo que se tenha:

a) $x! = 1$

b) $x! = 24$

c) $x! = 720$

d) $x! = x$

5) Resolva as equações:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$

b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 20$

c) $\dfrac{(n-1)!\,(n+2)!}{n!\,(n+1)!} = 2$

6) (Santa Casa - SP) A solução da equação $\dfrac{(n+2)!\,(n-2)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = 4$ é um número natural:

a) par
b) cubo perfeito
c) maior que 10
d) divisível por 5
e) múltiplo de 3

7) (PUC-SP) Se (n – 6)! = 720, então n é igual a:

a) 12 b) 576 c) 16 d) 4 e) 30

8) (UFRN) Se (x + 1)! = 3 (x!), então x é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

9) Calcule $m \in \mathbb{R}$, de modo que $\dfrac{m! + (m-1)!}{(m+1)! - m!} = \dfrac{5}{16}$.

10) (Faap-SP) Num hospital existem 3 portas de entrada que dão para um amplo saguão no qual existem 5 elevadores. Um visitante deve ser dirigir ao 6º andar utilizando-se um dos elevadores. De quantas maneiras diferentes poderá fazê-lo?

11) Uma companhia de móveis tem dez desenhos para mesas e quatro desenhos para cadeiras. Quantos pares de desenhos de mesa e cadeira pode a companhia formar?

12) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

13) (FGV-SP) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?

14) Quatro times de futebol (Vasco, Atlético, Corinthians e Internacional) disputam um torneio. Quantas são as possibilidades de classificação para os três primeiros lugares?

15) Numa eleição de uma escola há três candidatos a presidente, cinco a vice-presidente, seis a secretário e sete a tesoureiro. Quantos podem ser os resultados da eleição?

16) Determine quantas placas de carro podem ser fabricadas no Brasil.

17) Calcule:

a) $\dfrac{A_{6,2} + A_{4,3} - A_{5,2}}{A_{9,2} + A_{8,1}}$

b) $\dfrac{A_{5,2} + A_{6,1} - A_{5,3}}{A_{10,2} - A_{7,3}}$

18) Calcule o valor das expressões:

a) $P_5 - 3 \cdot P_3$

b) $P_4 - 2\left(\dfrac{P_8 - P_7}{P_4}\right)$

19) Calcule $\dfrac{C_{6,3}}{C_{4,1} + C_{5,4} + C_{11,1}}$.

20) Resolva as equações:

a) $A_{x,3} = 4 \cdot A_{x,2}$

b) $A_{n,2} = 9 \cdot A_{n,1}$

c) $A_{n,\,2} + A_{n-1,\,2} + A_{n-2,\,2} = 20$

21) Resolva a equação $C_{m,\,3} - C_{m,\,2} = 0$.

22) Calcule o valor de x na equação $A_{x,\,3} - 6 \cdot C_{x,\,2} = 0$.

23) Efetue a equação: $\dfrac{A_{n,\,6} + A_{n,\,5}}{A_{n,\,4}} = 9$

24) Quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados usando-se os algarismos 1, 2, 3, 5 e 8?

25) Quantos são os anagramas das palavras:

a) CAFÉ
b) BRASIL

26) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

27) Quantos anagramas da palavra EDITORA:

a) começam por A?
b) começam por A e terminam por E?

28) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos do sistema decimal, sem os repetir, de modo que:

a) comecem com 1.
b) comecem com 2 e terminem com 5.
c) sejam divisíveis por 5.

29) Quantas comissões com 6 membros podemos formar com 10 alunos?

30) Quantos anagramas da palavra PROBLEMA:

a) começam por R?
b) começam por P e terminam por M?
c) começam por vogal?
d) terminam por consoante?

31) De quantas maneiras podemos escalar um time de futebol de salão, dispondo de 8 jogadores?

32) (Faap-SP) Quantos anagramas podem formados com a palavra VESTIBULAR, em que as 3 letras V E S, nesta ordem, permaneçam juntas?

33) Quantas palavras de 2 letras distintas podem ser formadas com as vogais de nosso alfabeto?

34) Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

35) Dadas duas retas paralelas, tomam-se 7 pontos sobre uma delas e 4 sobre a outra. Quantos triângulos existem, cujos vértices sejam 3 dos pontos acima considerados?

36) (IME-RJ) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes, podem ser feitos?

37) Numa sala, temos 5 rapazes e 6 moças. Quantos grupos podemos formar de 2 rapazes e 3 moças?

38) Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 3000, formados por algarismos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

39) Considerando todos os números de seis algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 6, 7 e 9, determine:

a) quantos são pares;
b) quantos são ímpares.

40) De quantas maneiras 5 pessoas podem ser colocadas dentro de um carro, sabendo que:

a) somente 3 sabem dirigir;
b) somente 1 sabe dirigir;
c) todos sabem dirigir.

41) Qual o número de diagonais de um hexágono?

42) (FEI-SP) Calcule o número de diagonais do dodecágono.

43) Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) MALA
b) CORRER
c) AMIGA
d) CASSINO
e) RODOVIA

44) Um dado é lançado 4 vezes. De quantos modos distintos pode ser obtida uma sequencia com três faces iguais a 1 e uma face igual a 6?

45) Permutando os algarismos 3, 2, 3, 4, 4 e 5, quantos números de 6 algarismos podemos formar?

46) Uma moeda é lançada 5 vezes. De quantos modos distintos podem ser obtidas 2 caras e 3 coroas?

47) Considere os anagramas formados a partir de CORREDOR. Responda:

a) Quantos são?
b) Quantos começam por R?
c) Quantos começam por COR?
d) Quantos começam e terminam por R?

48) (Unifap-AP) A cidade de Macapá é banhada pelo rio Amazonas e cortada pela linha do Equador. Responda:

a) Quantos são os anagramas da palavra MACAPÁ? (Desconsidere o acento gráfico.)
b) Quantos anagramas da palavra AMAZONAS começam por consoante?
c) Em quantos anagramas da palavra EQUADOR as letras Q, U, A mantêm-se juntas?

49) Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) BANANA
b) CACHORRO
c) ASSISTENTE
d) COCADA
e) IRRIGAR

11. Exercícios de Aprofundamento

50) (UFBA) Existem 5 ruas ligando os supermercados S1 e S2 e 3 ruas ligando os supermercados S2 e S3. Para ir de S1 a S3, passando por S2, o número de trajetos diferentes que podem ser utilizados é:

a) 15
b) 10
c) 8
d) 5
e) 3

51) (FEI) Obter o número de anagramas formados com as letras da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

52) (FUVEST) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam com vogal é:

a) 24
b) 48
c) 96
d) 120
e) 144

53) Júlio deseja pintar a palavra LIVRE em um cartaz de publicidade, usando uma cor em cada letra. De quantos modos isso pode ser feito, se ele dispõe de 8 cores de tinta?

54) Duas pessoas entram num ônibus que tem 7 lugares vagos. De quantas maneiras diferentes 2 pessoas podem ocupar esses lugares?

55) (UFBA) Quatro jogadores saíram de Manaus para um campeonato em Porto Alegre, num carro de 4 lugares. Dividiram o trajeto em 4 partes e aceitaram que cada um dirigiria uma vez. Combinaram também que, toda vez que houvesse mudança de motorista, todos deveriam trocar de lugar. O número de arrumações possíveis dos 4 jogadores durante toda a viagem é:

a) 4
b) 8
c) 12
d) 24
e) 162

56) De quantos modos podem-se arrumar 4 livros de Matemática, 3 de Geografia e 2 de Biologia, numa estante, de modo que:

a) fiquem dispostos em qualquer ordem.
b) os livros de mesmo assunto fiquem juntos.

57) Uma papelaria tem 8 cadernos de cores diferentes, e quero comprar 3 cores diferentes. Quantas possibilidades de escolha eu tenho?

58) Há 12 inscritos em um campeonato de boxe. O número total de lutas que podem ser realizadas entre os inscritos é:

a) 12
b) 24
c) 33
d) 66
e) 132

59) (Cesgranrio-RJ) Um mágico se apresenta em público vestindo calça e paletó de cores diferentes. Para que ele possa se apresentar em 24 sessões com conjuntos diferentes, o número mínimo de peças (número de paletós mais número de calças) de que precisa é:

a) 24
b) 11
c) 12
d) 10
e) 8

60) (FUVEST) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

61) (FGV-SP) Seis pessoas decidem formar 2 comissões com 3 pessoas cada. De quantas formas diferentes isso pode ser feito?

a) 20
b) 120
c) 10
d) 92
e) 48

62) (PUC-SP) Pretende-se formar uma comissão de 5 membros a partir de um grupo de 10 operários e 5 empresários, de modo que nessa comissão haja pelo menos 2 representantes de cada uma das 2 classes. O total de diferentes comissões que podem ser assim formadas é:

a) 1000
b) 185
c) 19400
d) 1750
e) 1650

63) (Santa Casa-SP) Num hospital, há 3 vagas para trabalhar no berçário, 5 no banco de sangue e 2 na radioterapia. Se 6 funcionários se candidatarem para o berçário, 8 para o banco de sangue e 5 para a radioterapia, de quantas formas distintas essas vagas podem ser preenchidas?

a) 30
b) 240
c) 1120
d) 11200
e) 16128000

64) (UNESP) Sobre uma reta marcam-se 3 pontos e sobre outra reta, paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. O número de triângulos que obteremos unindo 3 quaisquer desses 8 pontos é:

a) 26
b) 90
c) 25
d) 45
e) 42

65) (FUVEST) Dado um quadrado plano ABCD, escolhem-se 3 pontos sobre o lado AB, 5 pontos sobre BC, 2 pontos sobre CD e 1 ponto sobre AD, de tal modo que nenhum desses pontos coincida com algum vértice do quadrado. Seja x o conjunto dos pontos escolhidos. O número de triângulos com vértice em x é:

a) 165
b) 55
c) 61
d) 154
e) 990

66) (UNICAMP) Num Kombi viajam 9 pessoas, das quais 4 podem dirigir. De quantas maneiras diferentes é possível acomoda-las na Kombi (3 no banco da frente, 3 no banco do meio e 3 no banco de trás), de forma que uma das 4 que dirigem ocupe o lugar da direção?

67) (FUVEST) Seja P o conjunto dos 17 vértices de um heptadecágono regular. Qual o número de triângulos cujos vértice pertencem a P?

68) (FEI) De todos os números menores que 100.000 e maiores que 50.000, quantos são os que lidos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda fornecem o mesmo valor? (Por exemplo: 56365.)

a) 450
b) 1500
c) 1000
d) 900
e) 500

69) (FGV) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6. De quantos modos podemos permuta-los, de modo que os algarismos ímpares fiquem sempre em ordem crescente?

a) 60
b) 120
c) 150
d) 181
e) 240

70) (FCC-BA) Considerem-se todos os anagramas da palavra MORENA. Quantos deles têm vogais juntas?

a) 36
b) 72
c) 120
d) 144
e) 180

71) (Fuvest 2004) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12
b) 18
c) 36
d) 72
e) 108

72) (Ueg 2005) A UEG realiza seu Processo Seletivo em dois dias. As oito disciplinas, Língua Portuguesa- Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia, Matemática, História, Geografia, Química e Física, são distribuídas em duas provas objetivas, com quatro disciplinas por dia. No Processo Seletivo 2005/2, a distribuição é a seguinte:

- primeiro dia: Língua Portuguesa-Literatura Brasileira, Língua Estrangeira Moderna, Biologia e Matemática;
- segundo dia: História, Geografia, Química e Física.

A UEG poderia distribuir as disciplinas para as duas provas objetivas, com quatro por dia, de

a) 1.680 modos diferentes.
b) 256 modos diferentes.
c) 140 modos diferentes.
d) 128 modos diferentes.
e) 70 modos diferentes.

73) (Uel 2006) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

a) 55
b) (40 - 3) . (15-1)
c) [40!/(37! . 3!)]. 15
d) 40 . 39 . 38 . 15
e) 40! . 37! . 15!

74) (Ufmg 2006) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada.Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

a) 70
b) 35
c) 45
d) 55

75) (Ufv 2004) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

a) 32
b) 28
c) 34
d) 26
e) 30

76) (Cesgranrio 2002) Um brinquedo comum em parques de diversões é o "bicho-da-seda", que consiste em um carro com cinco bancos para duas pessoas cada e que descreve sobre trilhos, em alta velocidade, uma trajetória circular. Suponha que haja cinco adultos, cada um deles acompanhado de uma criança, e que, em cada banco do carro, devam acomodar-se uma criança e o seu responsável. De quantos modos podem as dez pessoas ocupar os cinco bancos?

a) 14 400
b) 3 840
c) 1 680
d) 240
e) 120

77) (Pucmg 2003) Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. O valor de x é:

a) 180
b) 360
c) 440
d) 720

78) (Uel 2003) Sejam os conjuntos A = {1,2,3} e B = {0,1,2,3,4}. O total de funções injetoras de A para B é:

a) 10
b) 15
c) 60
d) 120
e) 125

79) (Unesp 2003) O conselho administrativo de um sindicato é constituído por doze pessoas, das quais uma é o presidente deste conselho. A diretoria do sindicato tem quatro cargos a serem preenchidos por membros do conselho, sendo que o presidente da diretoria e do conselho não devem ser a mesma pessoa. De quantas maneiras diferentes esta diretoria poderá ser formada?

a) 40.
b) 7920.
c) 10890.
d) 11!.
e) 12!.

80) (Fgv 2005) Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a

a) 56.
b) 70.
c) 86.
d) 120.
e) 126.

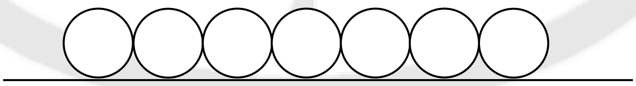
81) (FUVEST) Considere todas as trinta e duas sequências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas sequências possuem pelo menos três zeros em posições consecutivas?

a) 3
b) 5
c) 8
d) 12
e) 16

82) (VUNESP) De uma urna contendo 10 bolas coloridas, sendo 4 brancas, 3 pretas, 2 vermelhas e 1 verde, retiram-se, de uma vez, 4 bolas. Quantos são os casos possíveis em que aparecem exatamente uma bola de cada cor?

a) 120
b) 72
c) 24
d) 18
e) 12

83) (MACK) Cada um dos círculos da figura deverá ser pintado com uma única cor, escolhida dentre quatro disponíveis. Sabendo-se que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, então o número de formas de se pintar os círculos é:

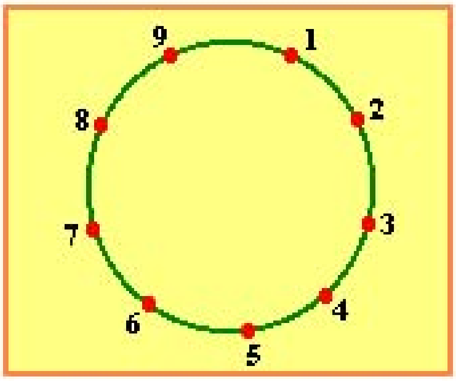


a) 100
b) 240
c) 729
d) 2916
e) 5040

84) (UEL) Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 42 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

a) 861
b) 1722
c) 1764
d) 3444
e) 242

85) Os polígonos de k lados (k múltiplo de 3) que podemos obter com vértices nos 9 pontos da figura, são em número de:



a) 83
b) 84
c) 85
d) 168
e) 169

86) (ITA) O número de soluções inteiras, maiores ou iguais a zero, da equação $x+y+z+w = 5$ é:

a) 36
b) 48
c) 52
d) 54
e) 56

87) Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

88) Uma moeda honesta é lançada 8 vezes. Qual a probabilidade de se obter duas coroas consecutivas?

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

89) (Transpetro-2006) Em um posto de observação foi montado um sinaleiro de formato pentagonal e em cada um de seus vértices foram colocadas duas lâmpadas de cores distintas, escolhidas entre 5 vermelhas e 5 verdes. Convenciona-se que, para a transmissão de uma mensagem, não pode ser acesa mais do que uma lâmpada por vértice, e que o número mínimo de vértices iluminados deve ser três. Se, cada vez que um conjunto de lâmpadas é aceso, transmite-se uma mensagem, o total de mensagens que podem ser transmitidas por esse sinaleiro é

a) 192
b) 128
c) 64
d) 32
e) 16

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Respostas

1. a) 1
b) 1
c) 720
d) 5040
e) 8
f) 25
g) 4
h) 2
i) 12
j) 120
2. a)
b) 210
c)
d) 3
e)
f)
3. a) n
b) x (x – 1)
c) n + 1
d) (2x + 2) (2x + 1)
e) x (x + 2)
f)
4. a) x = 0 ou x = 1
b) x = 4
c) x = 6
d) x = 1 ou x = 2
5. a) n = 3 b) n = 5 c) n = 2
6. alternativa a
7. n = 12
8. alternativa b
9. m = 4
10. 15
11. 40
12. 60
13. 120
14. 24
15. 630
16. 175 760 000
17. a) b)
18. a) 102 b) -2916
19. 1
20. a) {6} b) {10} c) {4}
21. {5}
22. {5}
23. {7}
24. 120
25. a) 24 b) 720
26. 504
27. a) 720 b) 120
28. a) 72 b) 8 c) 136
29. 210
30. a) 5040 b) 720
c) 15 120 d) 25 200
31. 56
32. 40 320
33. 20
34. 4536
35. 126
36. 210
37. 200

38. 336
39. a) 2160 b) 2880
40. a) 72 b) 24 c) 120
41. 9
42. 54
43. a) 12 b) 120 c) 60
d) 2520 e) 2520
44. 4
45. 180
46. 10
47. a) 3360 b) 1260
c) 60 d) 360
48. a) 120 b) 720
49. a)60 b) 5040
c) 151 200 d) 180 e) 420
50. A
51. 120
52. B
53. 6720
54. 42
55. D
56. a) 9! b) 1728
57. 56
58. D
59. D
60. 72
61. A
62. E
63. D
64. D
65. D
66. 161280
67. 680
68. E
69. B
70. D
71. C
72. E
73. C
74. D
75. C
76. B
77. D
78. C
79. C
80. B
81. C
82. C
83. D
84. B
85. E
86. E
87. 63 modos
88. 65
89. A

Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru