

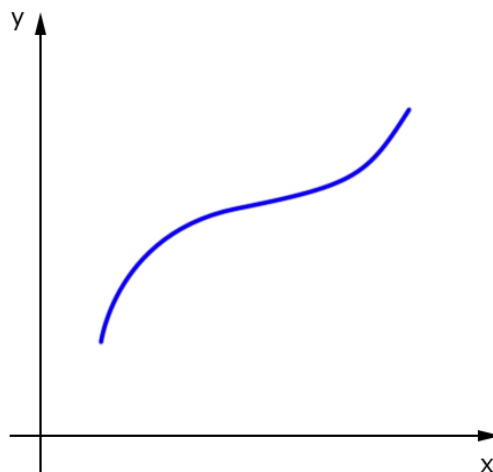
Crescimento, Decrescimento e Concavidades de Funções usando Derivadas

Crescimento Decrescimento de Funções

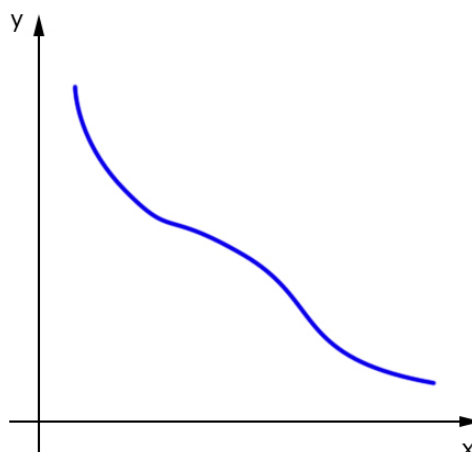
No estudo das derivadas, uma importante aplicação é aquela que se refere ao crescimento e decrescimento de uma função.

De modo intuitivo, dizemos que uma função é crescente quando o seu gráfico, quando olhado da esquerda para a direita, sempre “sobe”; a função é dita decrescente quando o gráfico, observado da esquerda para a direita, “desce”. Caso nenhuma dessas duas condições ocorra, dizemos que a função é constante e o seu gráfico será horizontal.

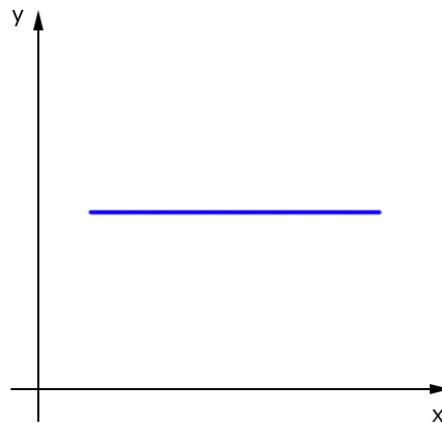
A seguir, veja um exemplo de uma função crescente:



Agora, veja uma função decrescente:

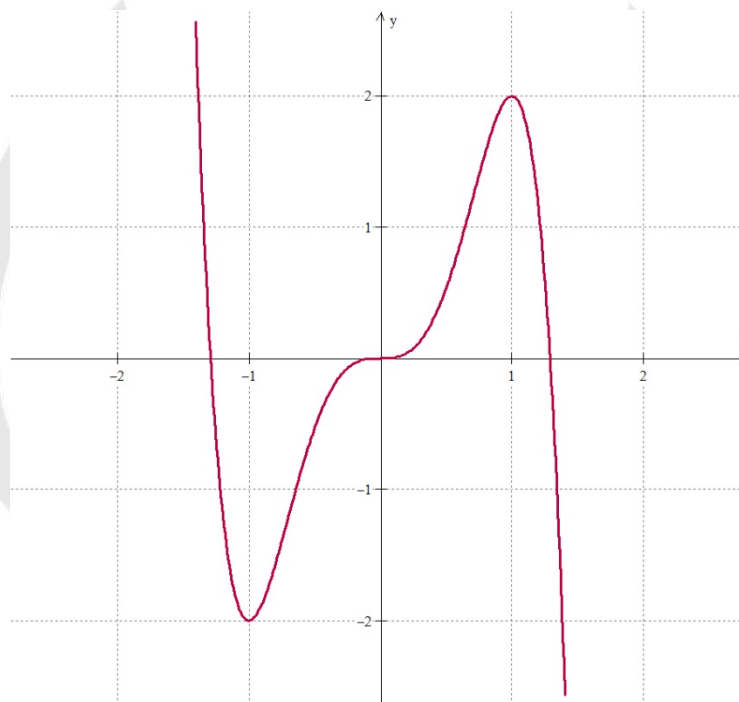


Finalmente, uma função constante:



Exemplo de crescimento e decrescimento

Vejamos o gráfico da função $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ a seguir:



Perceba o comportamento da função ao longo do eixo x:

- em $]-\infty; -1[$ a função é decrescente;
- em $]-1; 1[$ a função é crescente;
- em $]1; +\infty[$ a função é decrescente.



Para sabermos, analiticamente, o **comportamento de uma função com relação ao seu crescimento e decrescimento**, devemos analisar o comportamento da **primeira derivada dessa função**.

Teorema - Crescimento e Decrescimento

Seja uma função f , definida no conjunto dos reais, contínua no intervalo $]a,b[$ e derivável em todos os pontos desse intervalo.

a) Se $f'(x) > 0$ para todo x pertencente ao intervalo $]a,b[$, então a função f será estritamente **crecente** no intervalo $]a,b[$.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo x pertencente ao intervalo $]a,b[$, então a função f será estritamente **decrecente** no intervalo $]a,b[$.

Método prático

Para determinarmos os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função $f(x)$, nos pontos do domínio em que estiver definida e que satisfizer o teorema anterior, devemos calcular a $f'(x)$ e fazer o estudo do sinal dessa derivada. Aonde o sinal de $f'(x)$ for positivo, a função $f(x)$ é crescente; aonde o sinal de $f'(x)$ for negativo, a função $f(x)$ é decrescente.

Ponto Crítico

Se uma função f possui um ponto de extremo (máximo ou mínimo) local em $x=c$ e a função f é derivável neste ponto, então $x=c$ é um ponto crítico, isto é, $f'(c)=0$.

Em outras palavras, o ponto crítico pode ser definido como sendo o ponto em que uma função contínua deixa de ser crescente e passa a ser decrescente ou vice-versa.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 1

Descrever os intervalos de crescimento e decréscimo da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

**Exemplo 2**

Estudar o crescimento e decréscimo da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

**Exemplo 3**

Estudar o crescimento e decréscimo da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

**Exemplo 4**

Estudar o crescimento e decréscimo da função $f(x) = -x^4 + x^3$.



Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



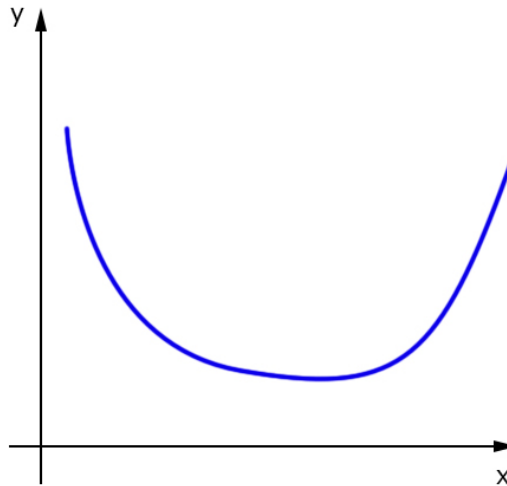
Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



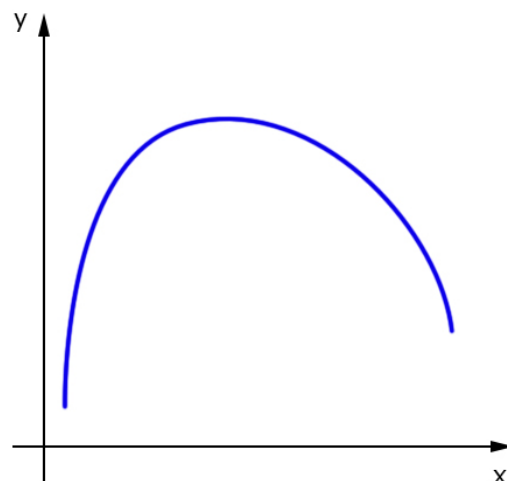
Estudo da Concavidade de uma Função

Uma função pode apresentar dois tipos de concavidade: para cima ou para baixo.

- Exemplo de uma função com a **concavidade para cima**:



- Exemplo de uma função com a **concavidade para baixo**:

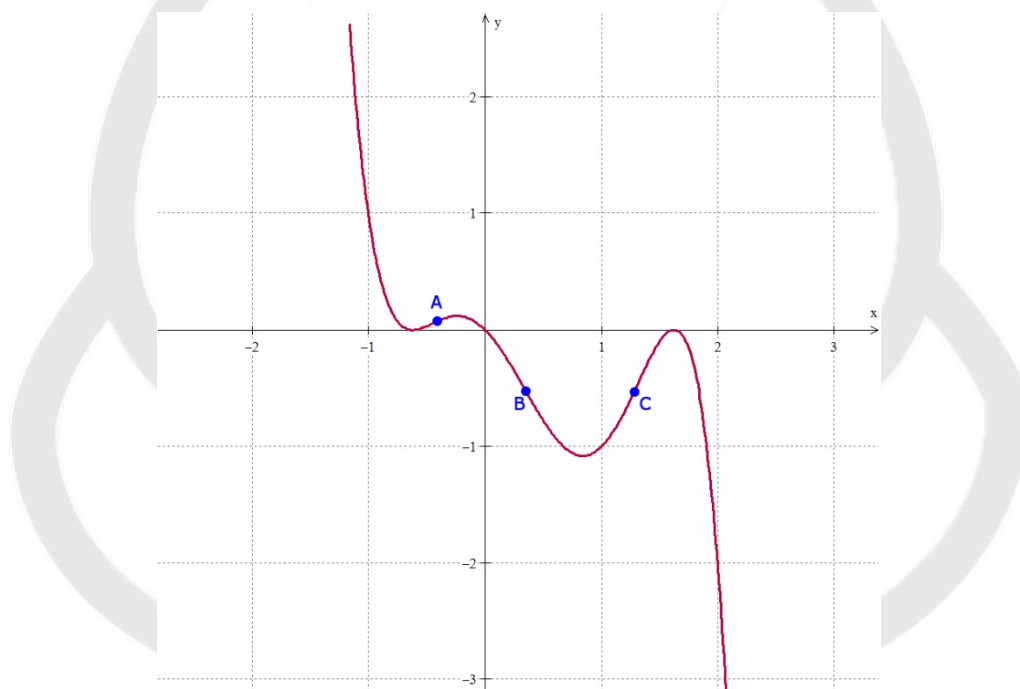


Exemplo das concavidades em uma função

Vejamos o gráfico a seguir que representa a função $f(x) = -x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 - x$.

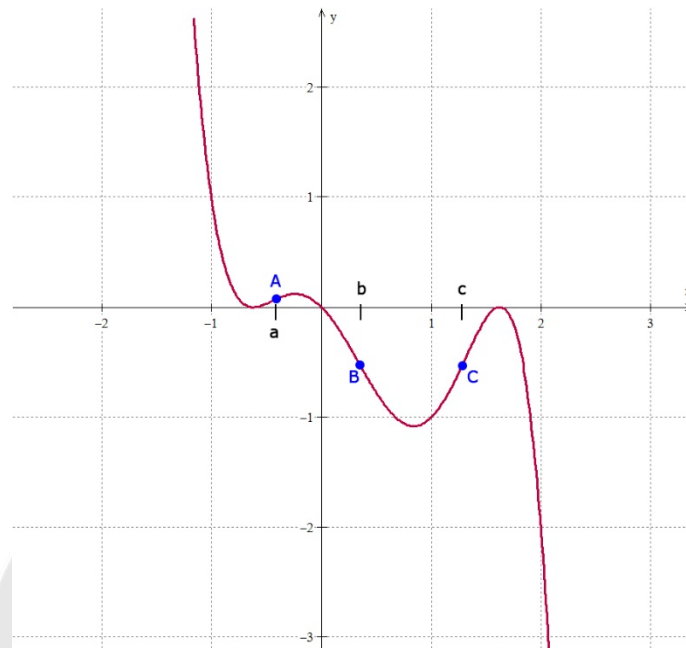


Vamos identificar os pontos em que ocorre a mudança de concavidade:



Para facilitar, vamos considerar alguns valores hipotéticos no eixo x:





A partir desse gráfico, podemos dizer que a função f possui:

- concavidade para cima no intervalo $]-\infty; a[$;
- concavidade para baixo no intervalo $]a; b[$;
- concavidade para cima no intervalo $]b; c[$;
- concavidade para baixo no intervalo $]c; +\infty[$.

Note, portanto, que os pontos A, B e C correspondem à mudança de concavidade da função f . Esses pontos são chamados de pontos de inflexão.

Pontos de Inflexão

São os pontos em que o gráfico de uma função muda a sua concavidade de “para cima” para “para baixo” ou vice versa.

Análise das concavidades

Para analisar a concavidade de uma função, é necessário analisar o comportamento da segunda derivada dessa função.



Teorema

Seja uma função f , definida no conjunto dos reais, contínua no intervalo $]a,b[$ e que admite primeira e segunda derivadas em todos os pontos desse intervalo.

- a) Se $f''(x) > 0$ para todo x pertencente ao intervalo $]a,b[$, então a função f terá **concavidade para cima** no intervalo $]a,b[$.
- b) Se $f''(x) < 0$ para todo x pertencente ao intervalo $]a,b[$, então a função f terá **concavidade para baixo** no intervalo $]a,b[$.

Método prático

Para determinarmos as concavidades de uma função $f(x)$, nos pontos do domínio em que estiver definida e que satisfizer o teorema anterior, devemos calcular $f''(x)$ e fazer o estudo do sinal dessa segunda derivada de f . Aonde o sinal de $f''(x)$ for positivo, a função $f(x)$ tem concavidade para cima; aonde o sinal de $f''(x)$ for negativo, a função $f(x)$ tem concavidade para baixo.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 5

Fazer o estudo da concavidade da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 6

Fazer o estudo das concavidades da função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

**Exemplo 7**

Fazer o estudo das concavidades da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

**Exemplo 8**

Fazer o estudo das concavidades da função $f(x) = -x^4 + x^3$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo de Crescimento, Decrescimento e Concavidades

Exemplo 9

Fazer o estudo do crescimento e decrescimento da função f dada a seguir. Depois, fazer o estudo das concavidades.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** com a resolução deste exercício no Canal Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula



Site: <http://www.professorguru.com.br>

Facebook: <http://www.facebook.com/professorguru>

Canal Professor Guru no Youtube: <http://www.youtube.com/c/professorguru>

