Integração Numérica– Método dos Trapézios

PROF. CONRAD PINHEIRO

You Tube Clique aqui para assistir a vídeo aula

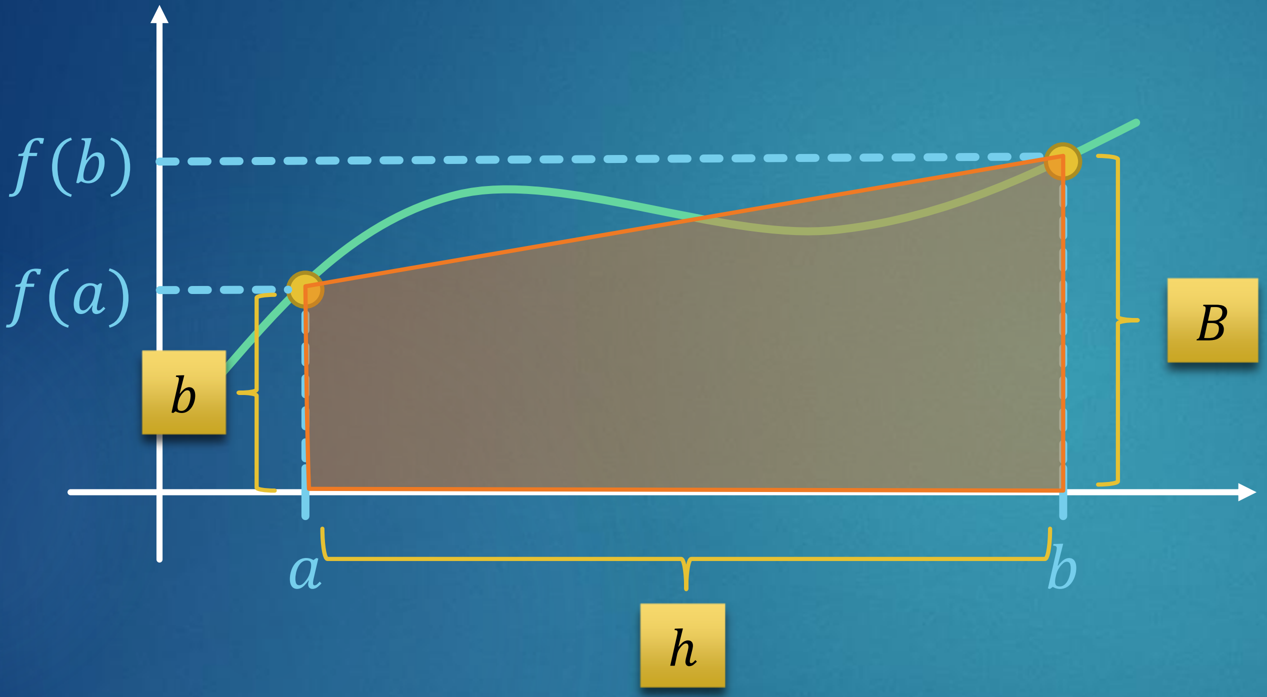
Conceitos

Integração Numérica

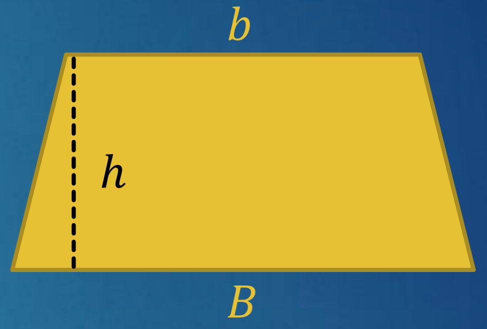
Do estudo de integrais, sabemos que uma integral definida $\int_a^b f(x)dx$ está associada à área compreendida entre o gráfico da função $f(x)$ e o eixo das abscissas (x) no intervalo $[a, b]$.

Existem situações que é complicado (ou por vezes impossível) se calcular a integral da função através das técnicas de integração conhecidas, como por exemplo a integração por substituição, integração por partes e integrações trigonométricas. Nesses casos, recorremos a métodos numéricos para calcular a área desejada.

Dada uma função $f(x)$ e um intervalo $[a, b]$, a integral $\int_a^b f(x)dx$ pode ser aproximada por:



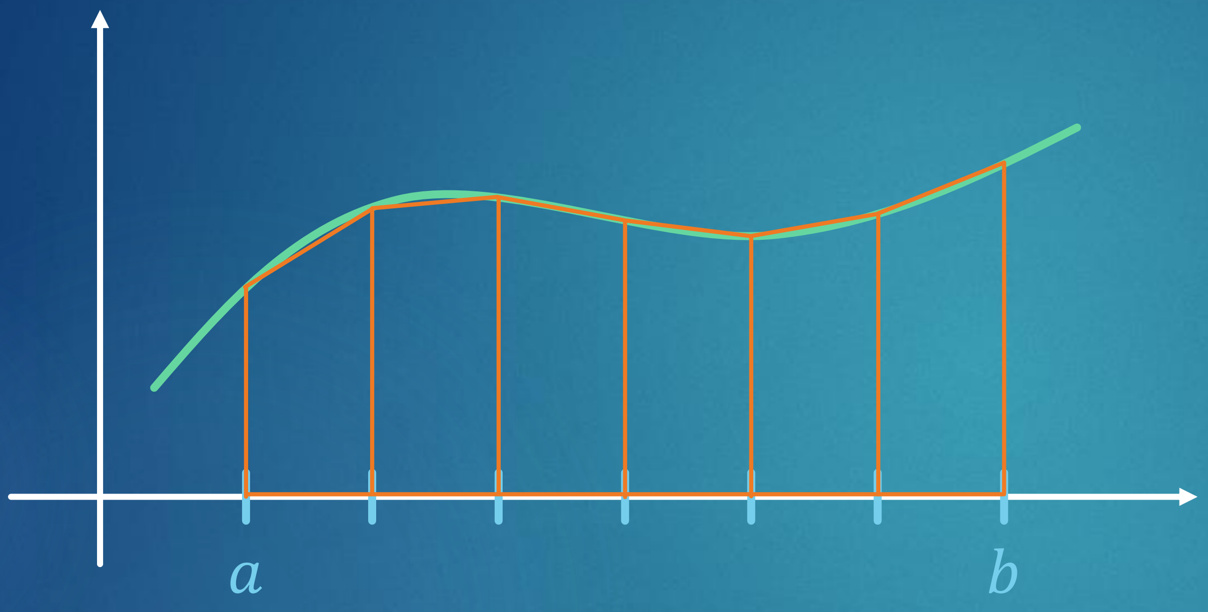
área da curva ≅ área do trapézio



$$A_{trapézio} = \frac{(B + b).h}{2}$$

$$Área = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{\big(f(b) + f(a)\big).(b - a)}{2}$$

Para obter uma melhor aproximação da área real, podemos dividir o intervalo $[a, b]$, em subintervalos de mesmo tamanho e calcular as áreas dos trapézios obtidos:

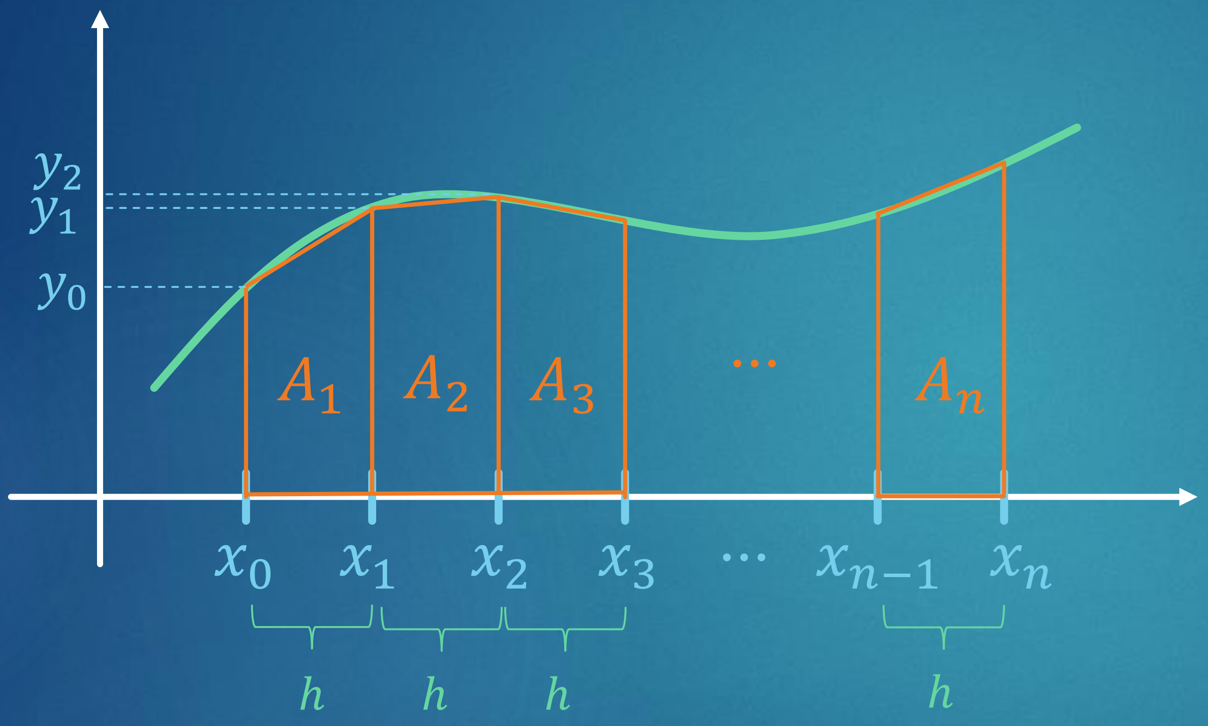


Quanto maior o número de subdivisões do intervalo, maior o número de trapézios e mais exata será a área obtida.

Para uma quantidade de subdivisões tendendo a infinito, a soma das áreas dos trapézios tenderá ao valor real da área entre a curva e o eixo horizontal.

Generalizando: dividimos o intervalo $[a, b]$ em $\boldsymbol{n}$ subintervalos de mesma amplitude $\boldsymbol{h}$.

$$A_{trapézio} = \frac{(B + b).h}{2}$$



$$A_1 = \frac{(y_1 + y_0).h}{2}$$

$$A_2 = \frac{(y_2 + y_1).h}{2}$$

$$A_3 = \frac{(y_3 + y_2).h}{2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{(y_n + y_{n-1}).h}{2}$$

Professor Guru

Logo, o valor da integral (área total) para **n** subintervalos será:

$$Área = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{(y_1 + y_0).h}{2} + \frac{(y_2 + y_1).h}{2} + \frac{(y_3 + y_2).h}{2} + \cdots + \frac{(y_n + y_{n-1}).h}{2} =$$

$$= h.\left(\frac{(y_0 + y_1)}{2} + \frac{(y_1 + y_2)}{2} + \frac{(y_2 + y_3)}{2} + \cdots + \frac{(y_{n-1} + y_n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{h}{2}.(y_0 + 2.y_1 + 2.y_2 + 2.y_3 + 2.y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

com

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Professor Guru

Exemplos

Exemplo 1

Calcular a integral $\int_1^3 x^2\,dx$ usando o método dos trapézios com 4 subdivisões do intervalo.

A partir da integral, vemos que o intervalo $[a, b]$ é $[1{,}3]$ e que $n = 4$.

Amplitude do intervalo:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

$$h = \frac{3-1}{4} = 0{,}5$$

Partindo do valor de $a = 1$, que será o nosso x_0, somamos a amplitude $h = 0{,}5$ para obtermos os demais valores de x_i.

$$\begin{array}{lll}
 & x_0 = 1 & \longrightarrow \quad y_0 = 1^2 = 1 \\
+h & x_1 = 1{,}5 & \longrightarrow \quad y_1 = 1{,}5^2 = 2{,}25 \\
+h & x_2 = 2 & \longrightarrow \quad y_2 = 2^2 = 4 \\
+h & x_3 = 2{,}5 & \longrightarrow \quad y_3 = 2{,}5^2 = 6{,}25 \\
+h & x_4 = 3 & \longrightarrow \quad y_4 = 3^2 = 9
\end{array}$$

Utilizando a função (a ser integrada) $y = x^2$, calculamos os valores de y_i .

$h = 0{,}5$

$y_0 = 1$

$y_1 = 2{,}25$

$y_2 = 4$

$y_3 = 6{,}25$

$y_4 = 9$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_1^3 x^2\, dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) =$$

$$= \frac{0{,}5}{2}(1 + 2.2{,}25 + 2.4 + 2.6{,}25 + 9) =$$

$$= \frac{0{,}5}{2}.35 =$$

$$\int_1^3 x^2\, dx \cong \mathbf{8{,}75}$$

Observação

$$v_{exato} = \int_1^3 x^2\,dx \cong \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3} \cong 8{,}6667$$

$$v_{aproximado} = \mathbf{8,75}$$

$$E_{absoluto} = |8{,}75 - 8{,}6667| = 0{,}0833$$

$$E_{relativo} = \frac{0{,}0833}{8{,}6667} = 0{,}0096 \;\; ou \;\; 0{,}96\%$$

Exemplo 2

Calcular a integral $\int_2^6 e^x.\cos(x)\,dx$ usando o método dos trapézios com 5 subdivisões do intervalo.

A partir da integral, vemos que o intervalo $[a,b]$ é $[2,6]$ e que $n = 5$.

Amplitude do intervalo:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

$$h = \frac{6-2}{5} = 0{,}8$$

Partindo do valor de $a = 2$, que será o nosso x_0, somamos a amplitude $h = 0{,}8$ para obtermos os demais valores de x_i.

$$
\begin{array}{lcl}
x_0 = 2 & \longrightarrow & y_0 = e^2.\cos(2) = -3{,}0749 \\
+h \quad x_1 = 2{,}8 & \longrightarrow & y_1 = e^{2,8}.\cos(2{,}8) = -15{,}4945 \\
+h \quad x_2 = 3{,}6 & \longrightarrow & y_2 = e^{3,6}.\cos(3{,}6) = -32{,}8198 \\
+h \quad x_3 = 4{,}4 & \longrightarrow & y_3 = e^{4,4}.\cos(4{,}4) = -25{,}0325 \\
+h \quad x_4 = 5{,}2 & \longrightarrow & y_4 = e^{5,2}.\cos(5{,}2) = 84{,}9291 \\
+h \quad x_5 = 6 & \longrightarrow & y_5 = e^6.\cos(6) = 387{,}3603
\end{array}
$$

Utilizando a função (a ser integrada) $y = e^x.\cos(x)$, calculamos os valores de y_i (calculadora deve estar em RAD).

Professor Guru

$h = 0{,}8$

$y_0 = -3{,}0749$

$y_1 = -15{,}4945$

$y_2 = -32{,}8198$

$y_3 = -25{,}0325$

$y_4 = 84{,}9291$

$y_5 = 387{,}3603$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_2^6 e^x.\cos(x)\,dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) =$$

$$= \frac{0{,}8}{2}(-3{,}0749 - 2.15{,}4945 - 2.32{,}8198 - 2.25{,}0325 + 2.84{,}9291 + 387{,}3603)$$

$$\int_2^6 e^x.\cos(x)dx \cong \mathbf{162{,}9800}$$

Exercícios

EXERCÍCIOS

1) Calcular a integral $\int_0^{2\pi} (sen(x) + 2)^2 dx$ usando o método dos trapézios com 4 subdivisões do intervalo.

2) Calcular a integral $\int_0^{0,8} xe^x dx$ usando o método dos trapézios com

a) 4 subdivisões do intervalo.
b) 10 subdivisões do intervalo.
c) 20 subdivisões do intervalo.

Respostas:

1) $9\pi \cong 28{,}2743$

2) a) 0,5649 b) 0,5565 c) 0,5553

Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru