Método de Newton-Raphson (ou método das tangentes)

PROF. CONRAD PINHEIRO

You Tube Clique aqui para assistir a vídeo aula

Objetivos

Método de Newton-Raphson

ou

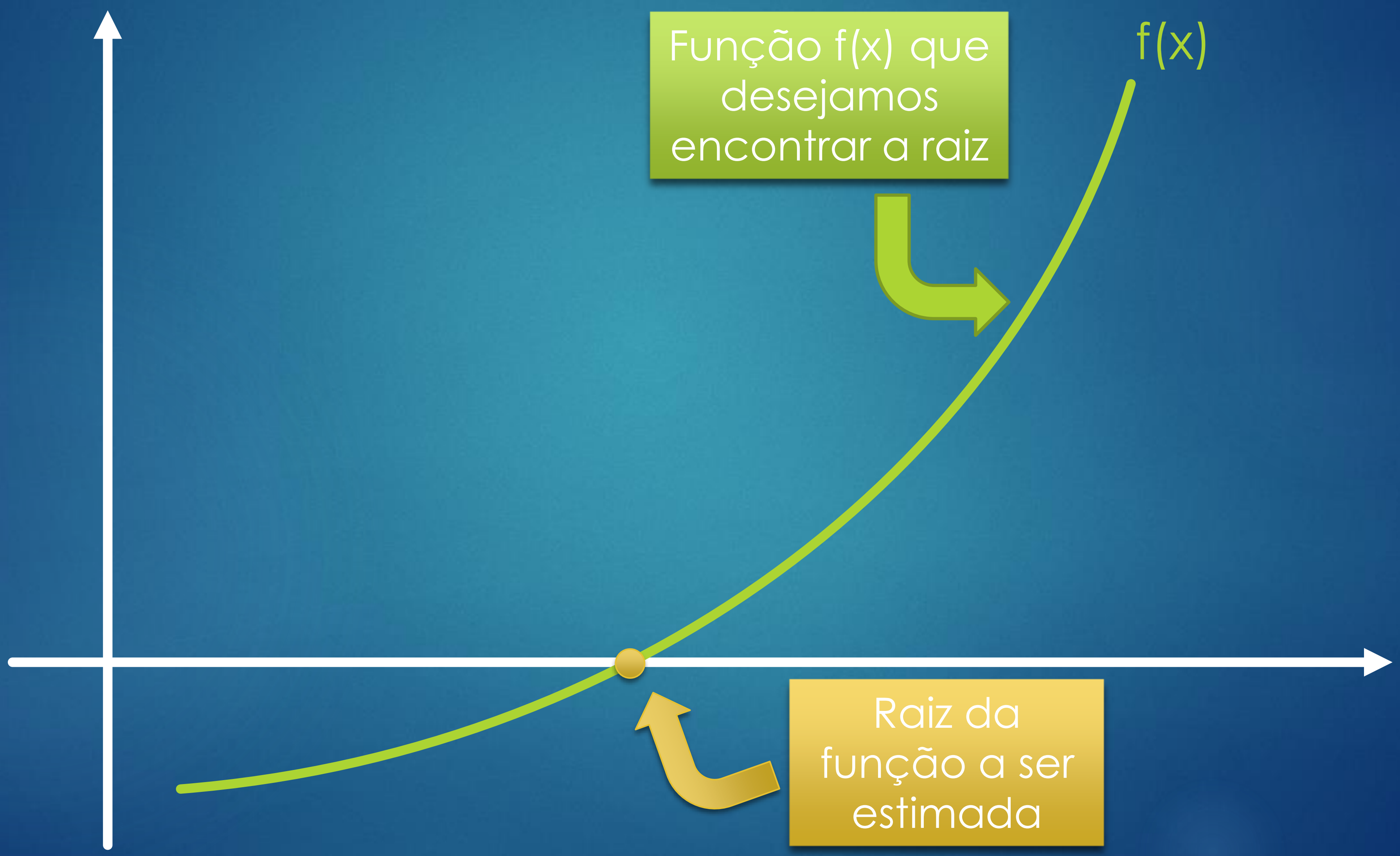
Método das Tangentes

O **Método de Newton-Raphson**, também conhecido como **Método das Tangentes**, tem por objetivo encontrar uma aproximação para uma raiz de uma função.

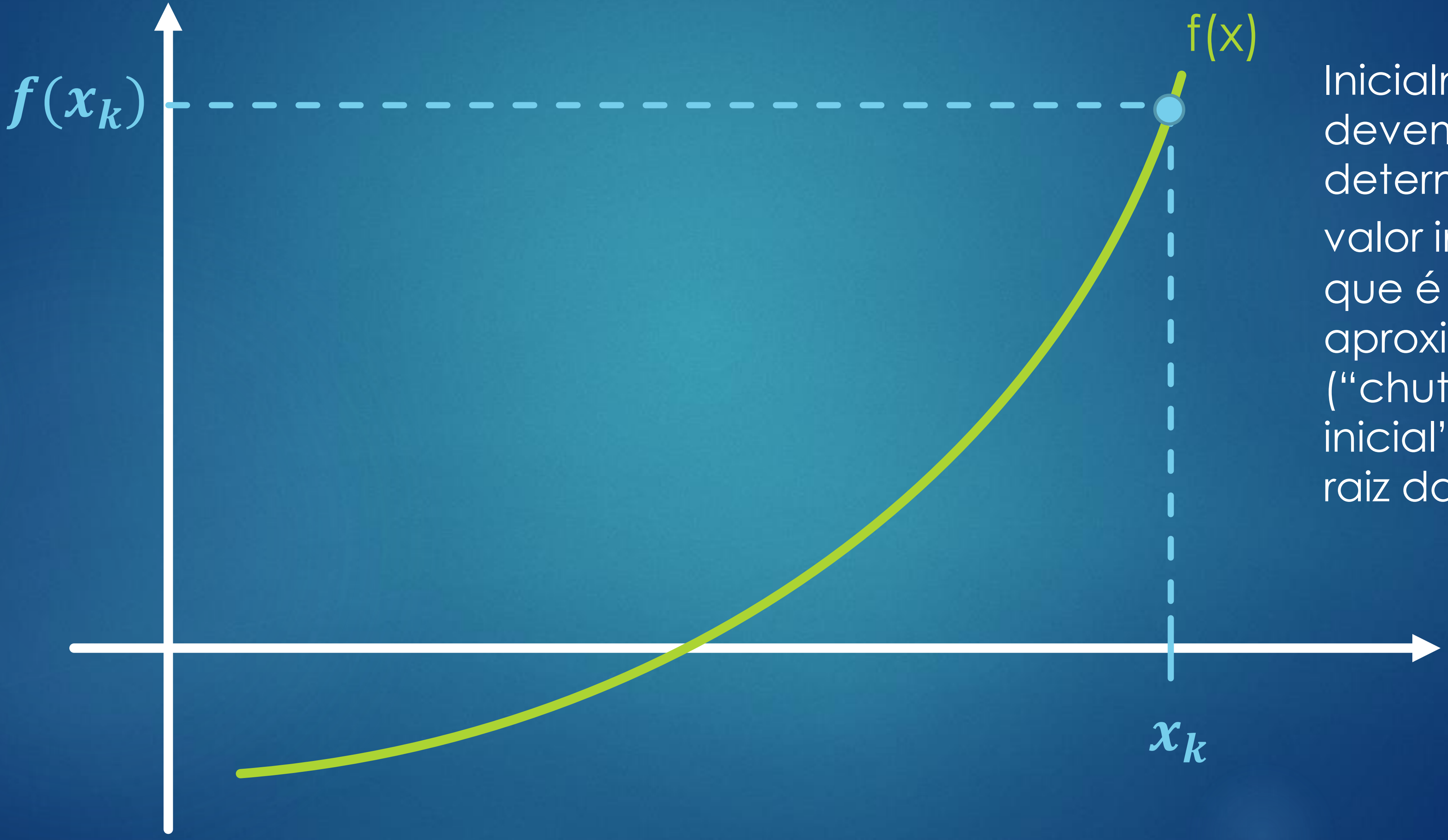
Esse método consiste em realizar aproximações utilizando **retas tangentes** ao gráfico de f(x).

Vale lembrar que, de modo simplificado, a reta tangente ao gráfico de uma função pode ser obtida através da **derivada** dessa função calculada em um determinado ponto. Essa é a base do método.

Conceitos do método de Newton-Raphson

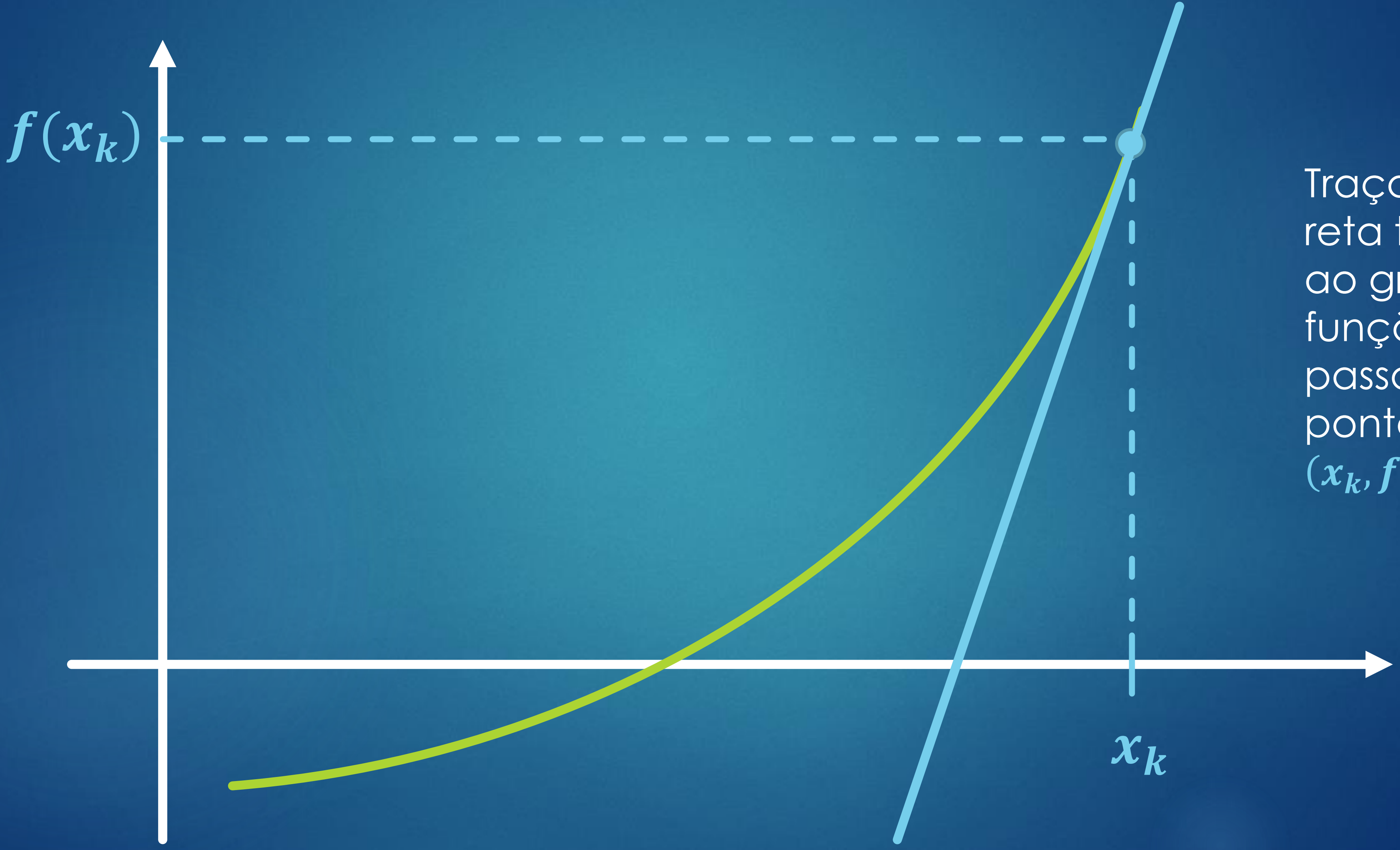


Conceitos do método de Newton-Raphson



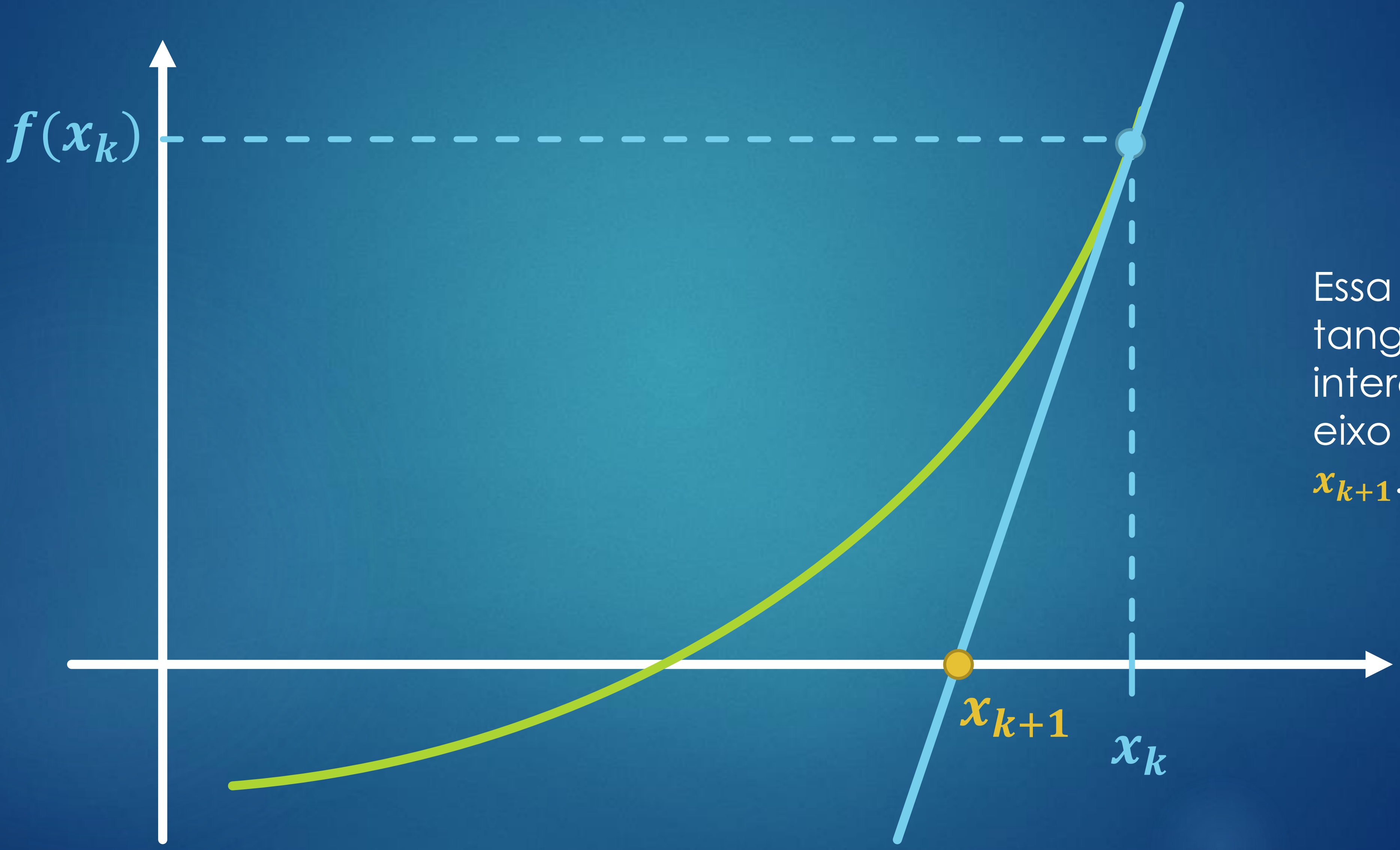
Inicialmente, devemos determinar um valor inicial x_k que é uma aproximação ("chute inicial") para a raiz da função.

Conceitos do método de Newton-Raphson



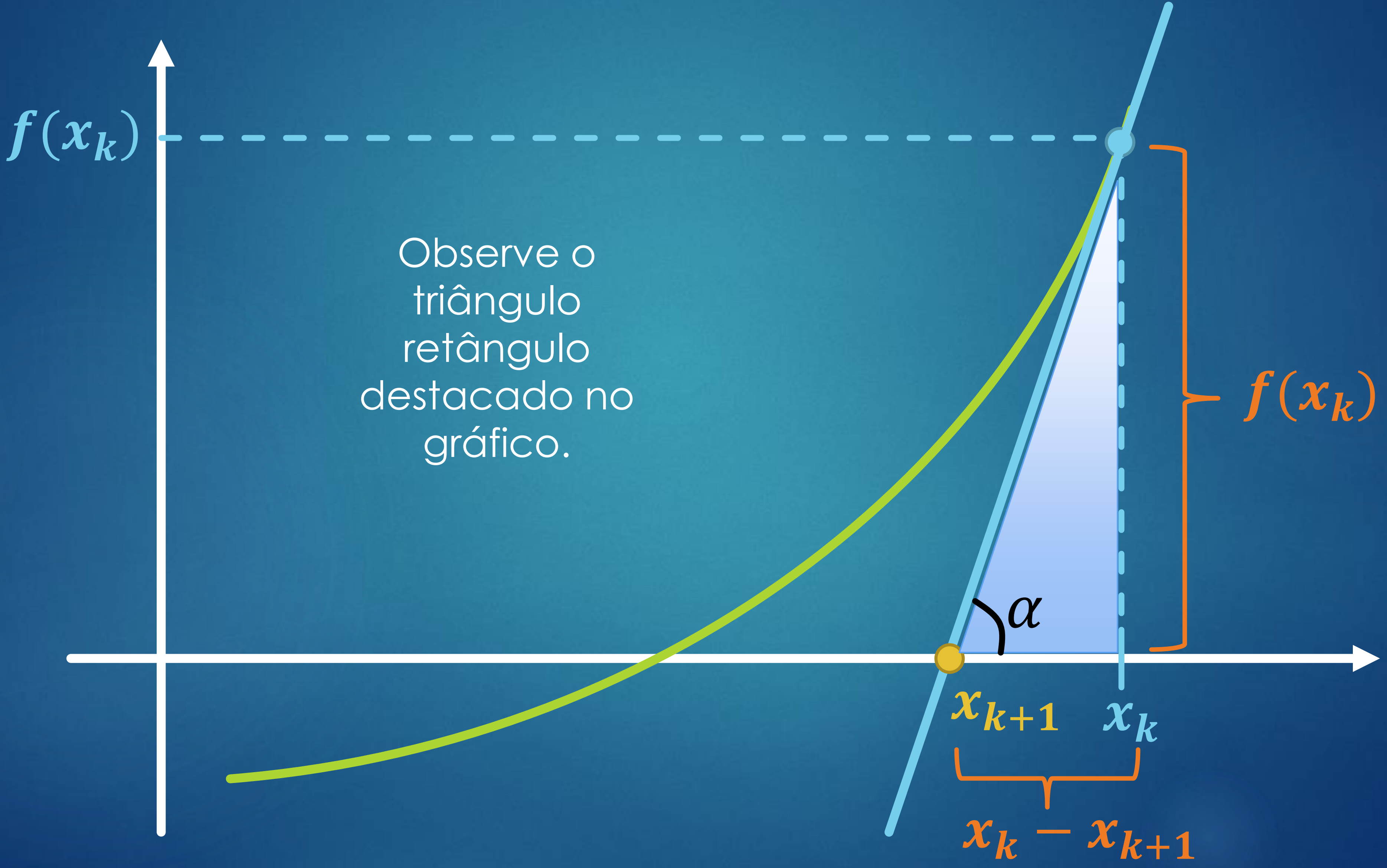
Traçamos uma reta tangente ao gráfico da função que passa pelo ponto $(x_k, f(x_k))$.

Conceitos do método de Newton-Raphson



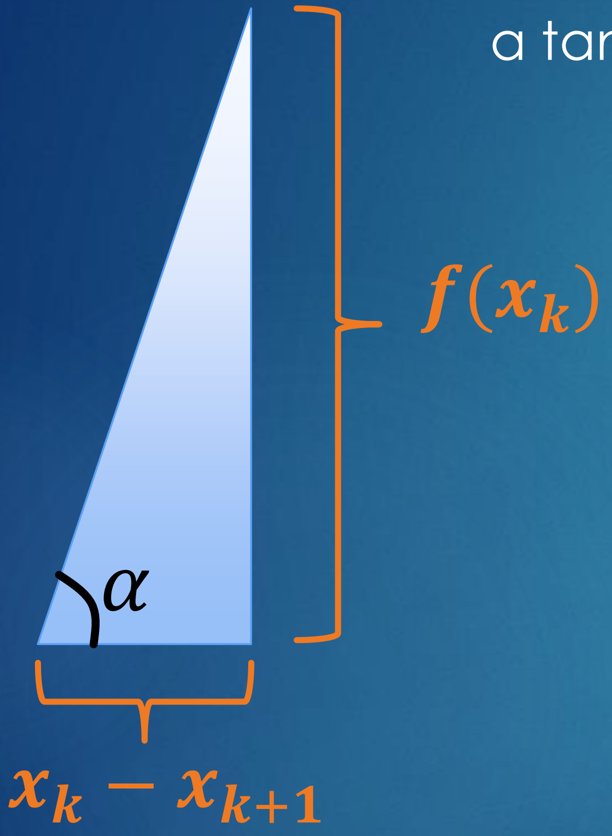
Essa reta tangente irá interceptar o eixo x no ponto x_{k+1}.

Conceitos do método de Newton-Raphson



Observe o triângulo retângulo destacado no gráfico.

Conceitos do método de Newton-Raphson



Nesse triângulo, vamos calcular a tangente do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{\mathrm{tg}(\alpha)}$$

$$x_k - \frac{f(x_k)}{\mathrm{tg}(\alpha)} = x_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\mathrm{tg}(\alpha)}$$

Mas, do estudo de derivadas, sabemos que $\mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{f'(x_k)}$. Então:

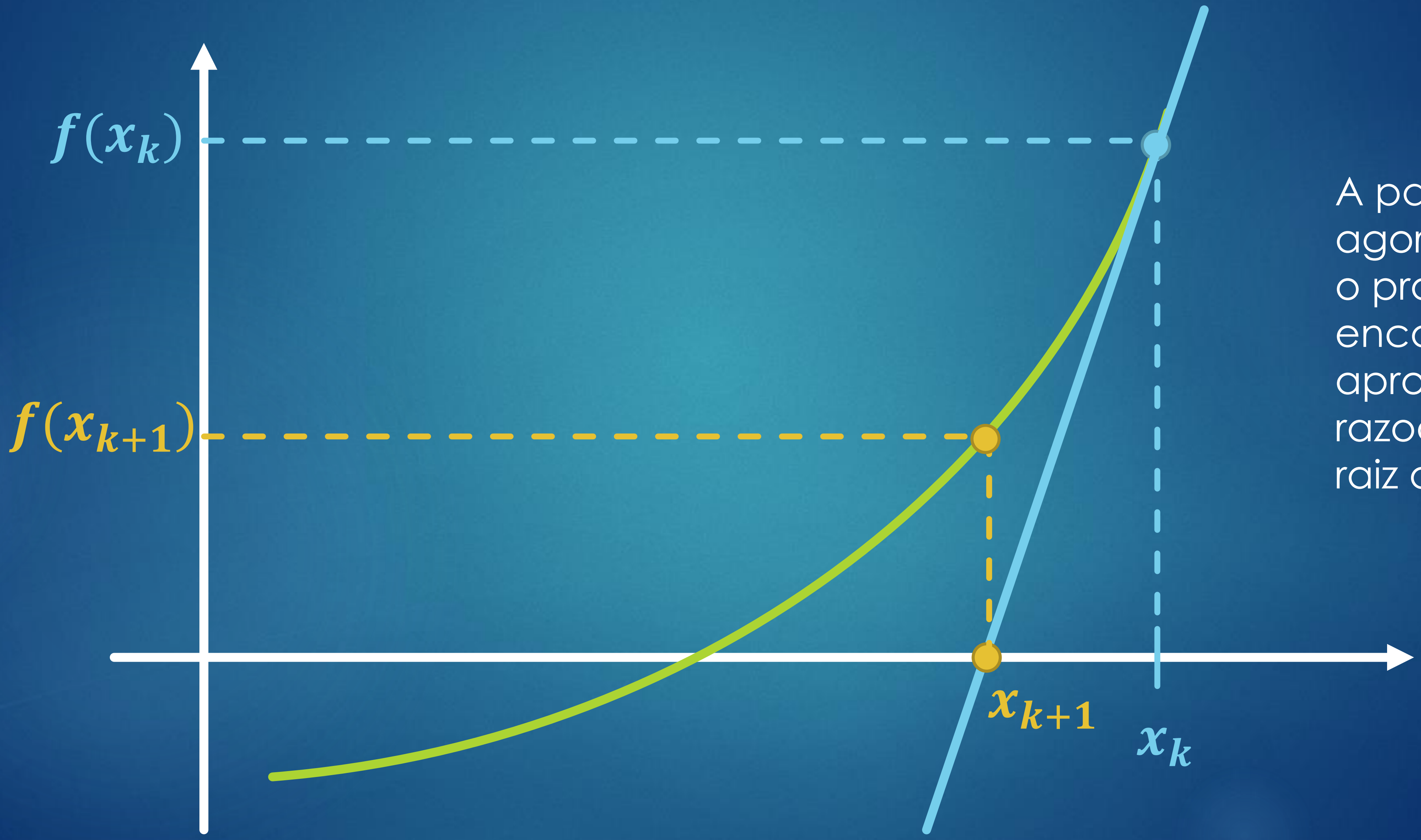
$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Essa é a fórmula do Método de Newton-Raphson. O critério de parada do processo é:

$$\boxed{|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon}$$

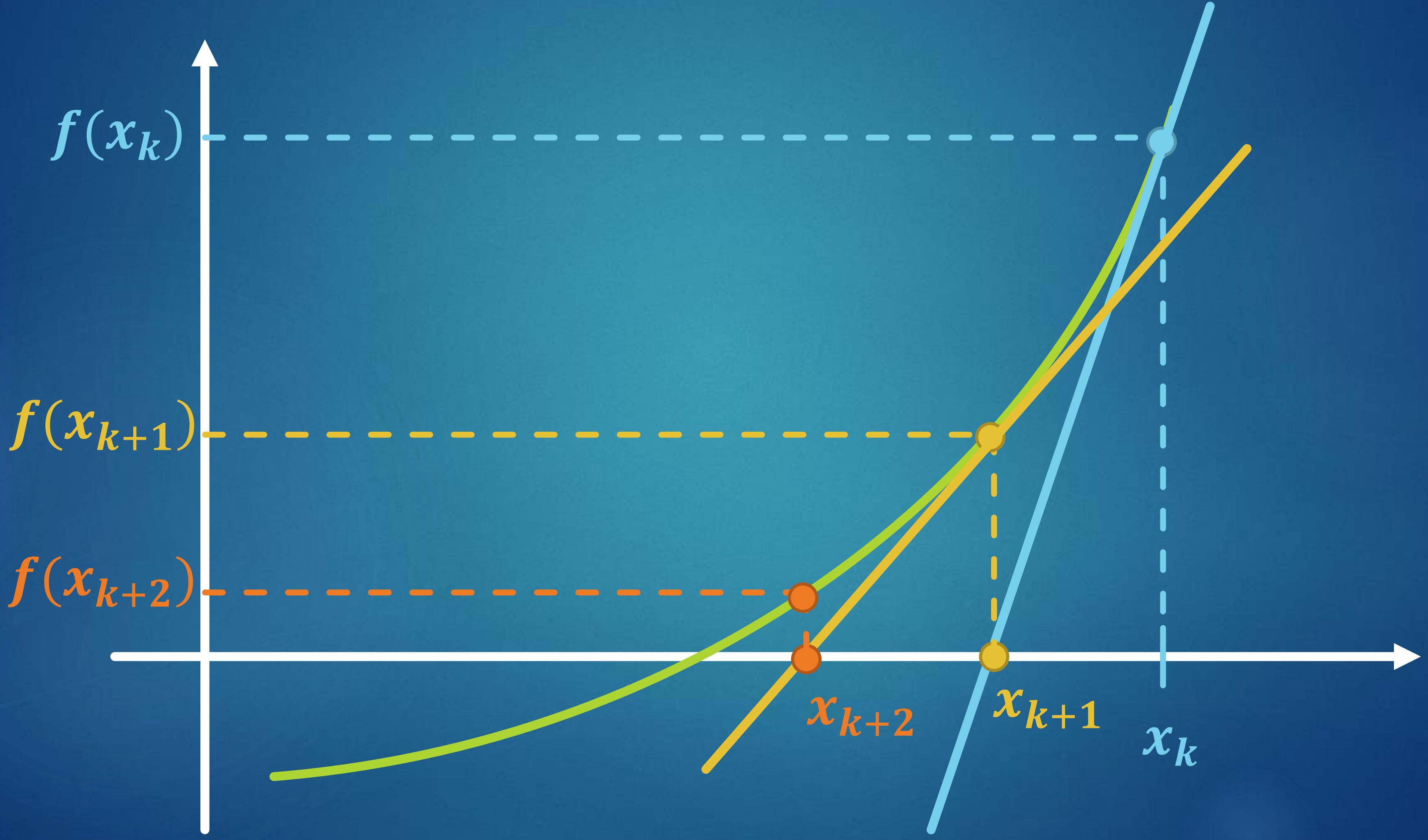
Onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um Erro Máximo previamente estipulado.

Conceitos do método de Newton-Raphson

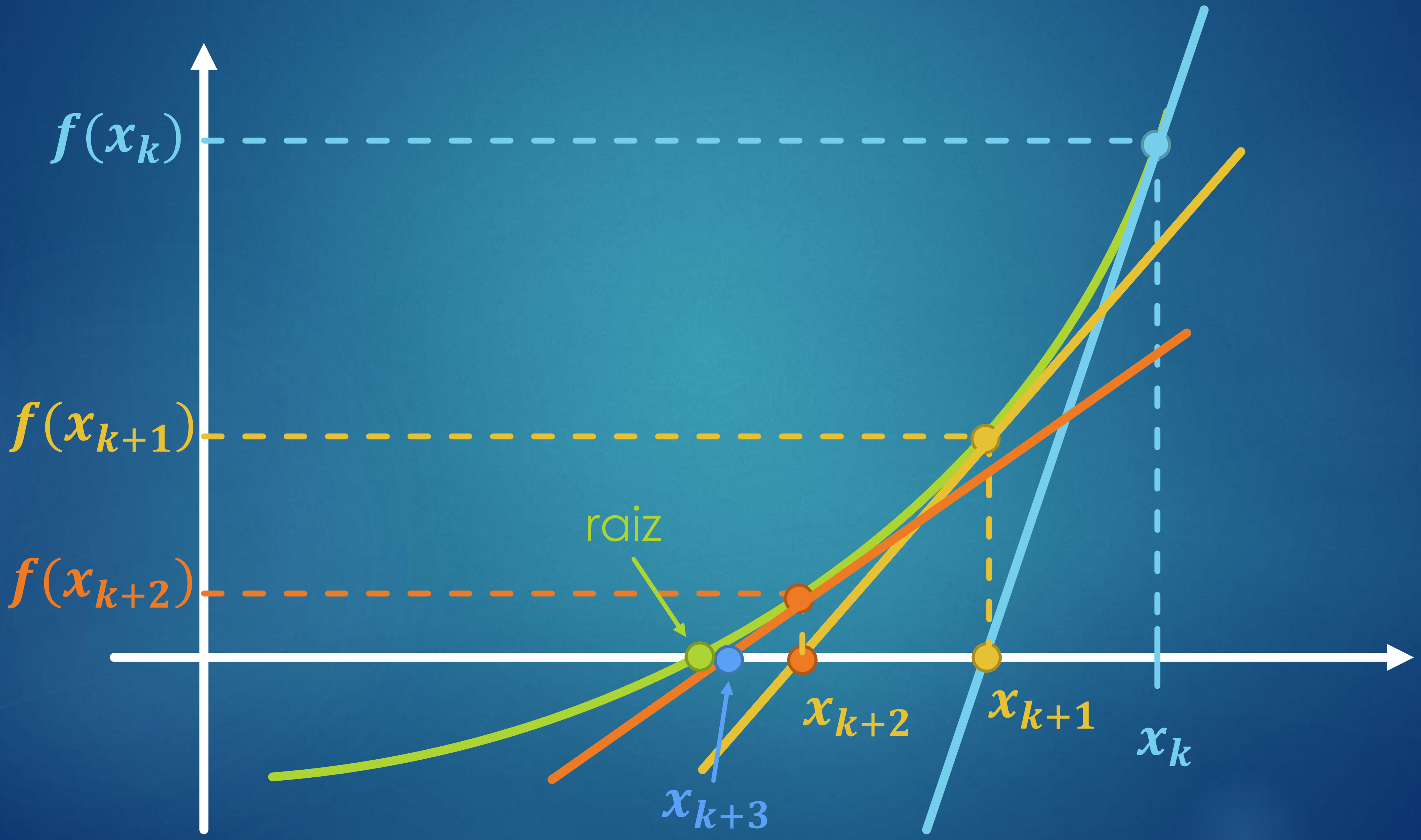


A partir de agora, repete-se o processo até encontrar uma aproximação razoável para a raiz de f(X).

Conceitos do método de Newton-Raphson



Conceitos do método de Newton-Raphson



Resumo

Para iniciarmos o Método de Newton-Raphson, devemos ter um valor x_0 que é uma solução inicial do problema (aproximação da raiz da função).

A partir desse valor inicial, passamos a calcular as aproximações através da fórmula

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

até que a condição a seguir seja satisfeita, ou seja, que o erro das aproximações seja menor que um erro máximo $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon}$$

Professor Guru

Exemplo

Estimar o valor de $\sqrt{3}$ pelo método de Newton-Raphson com erro máximo de 0,01. Utilizar 6 casas decimais.

O valor de $\sqrt{3}$ corresponde a uma das raízes da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3}$.

Vamos utilizar uma aproximação inicial igual a 2, ou seja, $\boldsymbol{x_0 = 2}$.

Note que: $\boldsymbol{f'(x) = 2x}$.

$$f(x) = x^2 - 3$$
$$f'(x) = 2x$$
$$x_0 = 2$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

ETAPA 1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2.2}$$

$$x_1 = 1,75$$

$$\varepsilon = |x_1 - x_0| = |1,75 - 2| =$$
$$= 0,25 > 0,01$$

ETAPA 2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 1,75 - \frac{f(1,75)}{f'(1,75)}$$

$$x_2 = 1,75 - \frac{1,75^2 - 3}{2.1,75}$$

$$x_2 = 1,732143$$

$$\varepsilon = |x_2 - x_1| =$$
$$= |1,732143 - 1,75| =$$
$$= 0,017857 > 0,01$$

ETAPA 3

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_3 = 1,732143 - \frac{f(1,732143)}{f'(1,732143)}$$

$$x_3 = 1,732143 - \frac{1,732143^2 - 3}{2.1,732143}$$

$$x_3 = 1,732051$$

$$\varepsilon = |x_3 - x_2| =$$
$$= |1,732051 - 1,732143| =$$
$$= 0,000092 < 0,01$$

Portanto, o processo é interrompido.

Logo, a aproximação da raiz para $f(x) = x^2 - 3$ é:

$$x_3 = 1,732051$$

Ou seja,

$$\sqrt{3} \cong 1,732051$$

Observação: na calculadora, utilizando 6 casas decimais, temos que $\sqrt{3} = 1,732051$

Exercícios

Exercício 1

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Determinar, usando o método de Newton-Raphson, a menor raiz positiva da função $f(x) = 4\cos(x) - e^x$ com $\varepsilon < 0{,}01$ no intervalo [1,2]. Usar 4 casas decimais na resposta.

Dicas para a resolução:

Valor inicial: $x_0 = 1$.

Derivada da função:
$f'(x) = -4sen(x) - e^x$.

Resposta:

Nº de etapas realizadas: 2
Raiz da função: $\boldsymbol{x = 0,9048}$.

Valor inicial: $x_0 = 2$.

Derivada da função:
$f'(x) = -4sen(x) - e^x$.

Resposta:

Nº de etapas realizadas: 4
Raiz da função: $\boldsymbol{x = 0,9048}$.

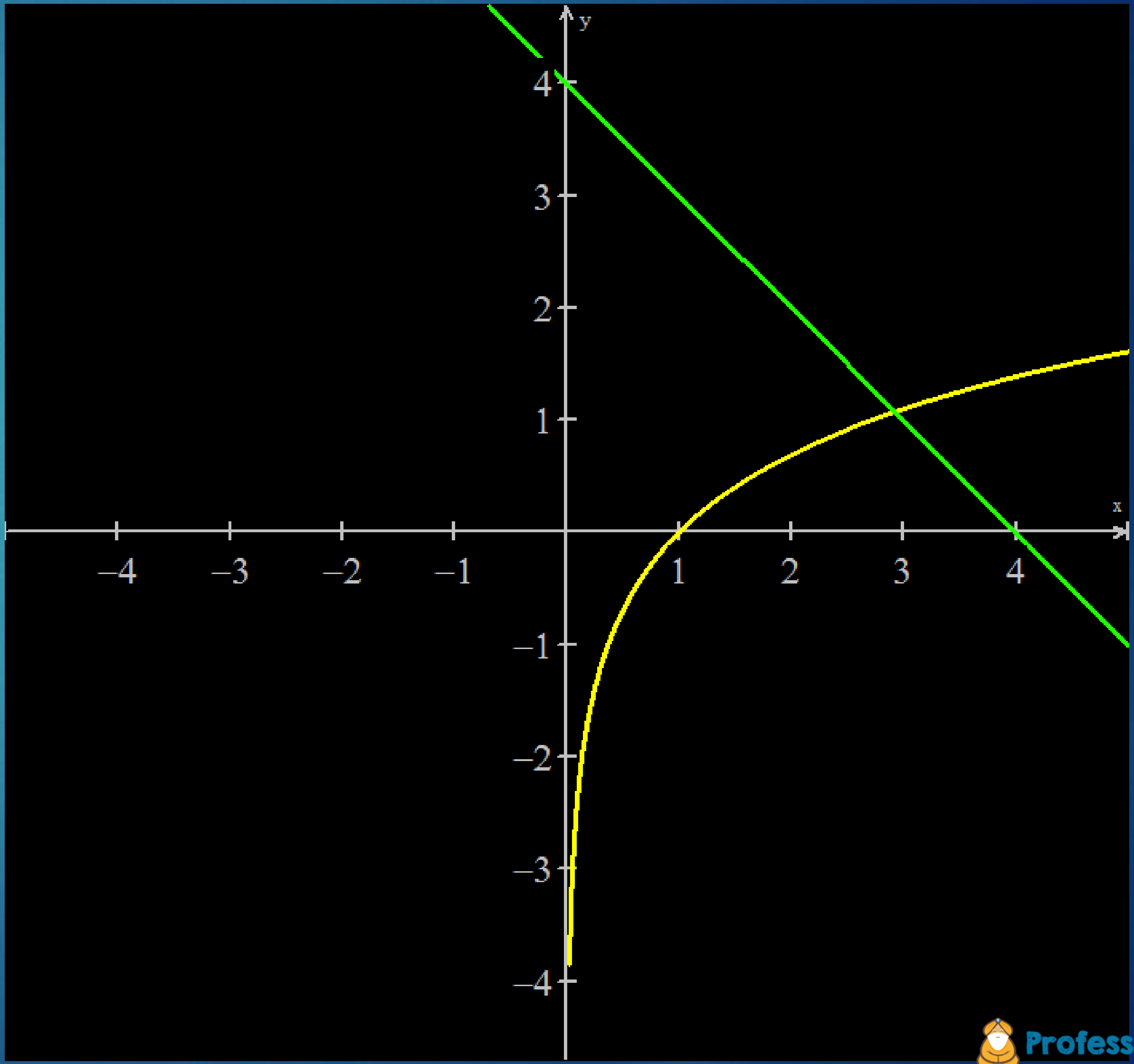
Professor Guru

Exercício 2

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Resolver, usando o método de Newton-Raphson, a equação $\ln(x) + x - 4 = 0$ com $\varepsilon < 0{,}001$. Usar 4 casas decimais na resposta.

Para estimar um valor inicial para a resolução, considere os gráficos das funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = -x + 4$ dados a seguir:



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Exercício 2

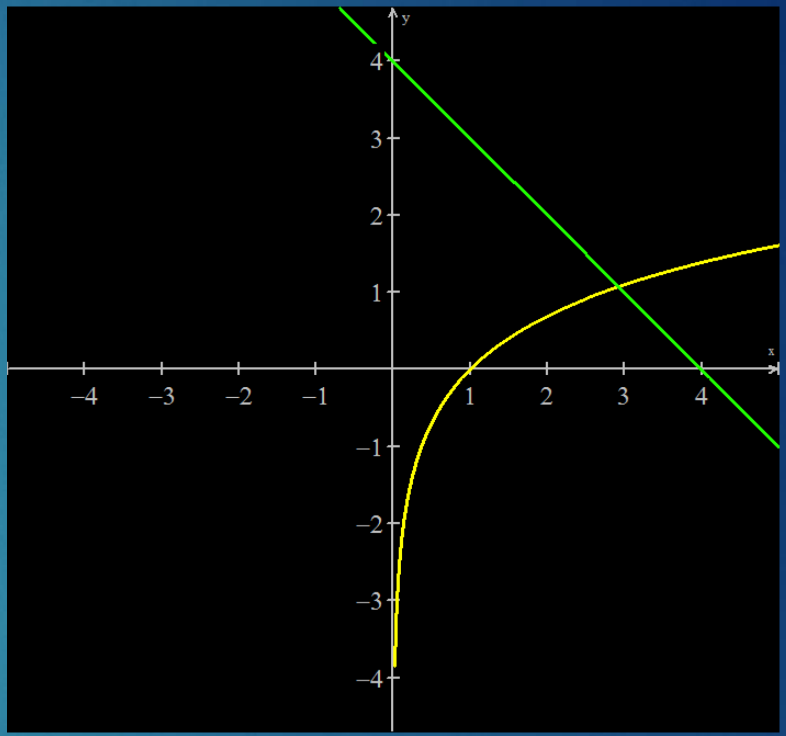
Dicas para a resolução:

Note que:

$$\ln(x) + x - 4 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -x + 4$$

$$g(x) = \ln(x) \qquad h(x) = -x + 4$$

A raiz da função corresponde ao ponto em que $g(x) = h(x)$, ou seja, ao valor de x em que os gráficos se interceptam.



Portanto, a partir do gráfico, é fácil observar que **existe uma raiz no intervalo [1,4].**

Exercício 2

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Dicas para a resolução:

$$f(x) = \ln(x) + x - 4$$

Valor inicial: $x_0 = 1$.

Derivada da função:
$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$.

Resposta:

Nº de etapas realizadas: 4
Raiz da função: $\boldsymbol{x = 2,9263}$.

Professor Guru

Professor Guru

Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru