You Tube Clique aqui para assistir a vídeo aula

Método da Bissecção para determinação de raízes

Prof. Conrad Pinheiro

MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja um intervalo $[a, b]$ tal que $f(a).f(b) < 0$. Consideremos o ponto médio do intervalo: $x_M = \frac{a+b}{2}$.

Se $f(x_M) = 0$, então x_M é a raiz da função. Caso contrário:

- Se $\boldsymbol{f(a).f(x_M) < 0}$, repetimos o processo mantendo o valor de a e substituindo o valor de b por x_M.
- Se $\boldsymbol{f(x_M).f(b) < 0}$, repetimos o processo mantendo o valor de b e substituindo o valor de a por x_M.

MÉTODO DA BISSECÇÃO

O erro ε é considerado como sendo

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}\ .$$

O processo deverá ser repetido até que ε seja menor do que um erro máximo previamente estipulado.

A raiz aproximada da função será o último valor de x_M calculado.

EXEMPLO

Determinar um valor aproximado para $\sqrt{5}$ com $\varepsilon \leq 0{,}01$.

Note que $\sqrt{5}$ é uma das raízes da função $f(x) = x^2 - 5$.

Aplicando o Teorema de Bolzano para estimar um intervalo que conterá a raiz positiva da função:

Há pelo menos uma raiz no intervalo **[2,3]**

x	0	1	2	3	4
$f(x) = x^2 - 5$	-5	-4	-1	4	11

Sinais contrários

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo **[2,3]**

$\varepsilon \leq 0{,}01$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{x_M}$	$\boldsymbol{f(a)}$	$\boldsymbol{f(b)}$	$\boldsymbol{f(x_M)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5

$$\boldsymbol{x_M} = \frac{a+b}{2} = \frac{\mathbf{2}+\mathbf{3}}{2} = \mathbf{2{,}5}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 - 5 = \mathbf{-1}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{3}) = \mathbf{3}^2 - 5 = \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{2{,}5}) = \mathbf{2{,}5}^2 - 5 = \mathbf{1{,}25}$$

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} = \frac{|2-3|}{2} = \mathbf{0{,}5}$$

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{x_M}$	$\boldsymbol{f(a)}$	$\boldsymbol{f(b)}$	$\boldsymbol{f(x_M)}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5					

Valor de b é substituído por x_M

Manter o valor de a

Sinais contrários

A partir de agora, repete-se o processo até que $\varepsilon \leq 0{,}01$.

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25

$$x_M = \frac{a+b}{2} = \frac{2+2{,}5}{2} = 2{,}25$$

$$f(2) = 2^2 - 5 = -1$$

$$f(2{,}5) = 2{,}5^2 - 5 = 1{,}25$$

$$f(2{,}25) = 2{,}25^2 - 5 = 0{,}0625$$

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} = \frac{|2-2{,}5|}{2} = 0{,}25$$

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	$\boxed{2{,}25}$	$\boxed{-1}$	1,25	$\boxed{0{,}0625}$	0,25
2	2,25					

Valor de b é substituído por x_M

Manter o valor de a

Sinais contrários

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25					

Valor de a é substituído por x_M

Manter o valor de b

Sinais contrários

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625

Sinais contrários

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625
2,1875	2,25					

Sinais contrários

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625
2,1875	2,25	2,21875	-0,21	0,0625	-0,077	0,03125

Professor Guru

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625
2,1875	2,25	2,21875	-0,21	0,0625	-0,077	0,03125
2,21875	2,25					

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625
2,1875	2,25	2,21875	-0,21	0,0625	-0,077	0,03125
2,21875	2,25	2,234375	-0,077	0,0625	-0,0075	0,0153

$f(x) = x^2 - 5$

Há pelo menos uma raiz no intervalo [2,3]

$\varepsilon \leq 0{,}01$

a	b	x_M	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_M)$	ε
2	3	2,5	-1	4	1,25	0,5
2	2,5	2,25	-1	1,25	0,0625	0,25
2	2,25	2,125	-1	0,0625	-0,48	0,125
2,125	2,25	2,1875	-0,48	0,0625	-0,21	0,0625
2,1875	2,25	2,21875	-0,21	0,0625	-0,077	0,03125
2,21875	2,25	2,234375	-0,077	0,0625	-0,0075	0,0153
2,234375	2,25	2,2421875	-0,0075	0,0625	0,027	0,0078

Valor é menor do que 0,01. Então, interrompemos o processo.

O valor procurado será sempre o último x_M calculado.

Portanto, a raiz aproximada da função será 2,2421875.
Ou seja: $\sqrt{5} \cong 2{,}2421875$ com $\varepsilon \leq 0{,}01$.

Professor Guru

Portanto, a raiz aproximada da função será 2,2421875.

Ou seja: $\sqrt{5} \cong 2{,}2421875$ com $\varepsilon \leq 0{,}01$.

OBSERVAÇÃO

Na calculadora, temos que

$$\sqrt{5} \cong 2,236067977$$

Erro real cometido:

$$\varepsilon = \left|v_{exato} - v_{aproximado}\right| = |2{,}236067977 - 2{,}2421875| = \underbrace{0{,}006119 \leq 0{,}01}_{\text{Está de acordo com o enunciado!}}$$

Professor Guru

EXERCÍCIOS

Método da Bissecção

Professor Guru

EXERCÍCIOS

1) Seja a função $f(x) = e^x + x$. Determinar a raiz da função com erro máximo de 0,05.

2) Seja a função $f(x) = x - \cos(x)$. Determinar a raiz da função com erro máximo de 0,01.

Respostas: 1) -0,59375 2) 0,7421875

Professor Guru

Site: http://www.professorguru.com.br

Facebook: http://www.facebook.com/professorguru

Canal Professor Guru no Youtube: http://www.youtube.com/c/professorguru