Distribuição Geométrica

1. Distribuição Geométrica

Muitas situações reais podem ser repetidas até atingir–se o sucesso. Um candidato pode prestar uma prova de vestibular até ser aprovado, ou você pode digitar um número de telefone várias vezes até conseguir completar a ligação. Situações como essas podem ser representadas por uma distribuição Geométrica.

Uma distribuição pode ser considerada Geométrica se satisfizer as seguintes condições:

1) Uma tentativa (correspondente a um Ensaio de Bernoulli) é repetida até que o sucesso ocorra, ou seja, ocorrem k–1 fracassos **até que ocorra o primeiro sucesso** na k–ésima tentativa.

2) As tentativas são independentes umas das outras.

3) A **probabilidade de sucesso p** é constante em todos os Ensaios de Bernoulli.

Logo, a probabilidade de que ocorra sucesso na tentativa k é:

$$P(X=k) = p.(1-p)^{k-1}$$

com k=1,2,3,4...

Ou seja, ocorrem **k–1 fracassos** com probabilidade **1–p** até que ocorra **um sucesso** na tentativa k com **probabilidade p**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 1

Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se 0,01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, determine a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa na 1ª peça produzida, na 2ª, na 5ª, na 10ª, na 20ª e na 40ª.

Vamos admitir que cada peça tem a mesma probabilidade de ser defeituosa, independentemente da qualidade das demais. Sendo a ocorrência de peça defeituosa um sucesso, podemos aplicar o modelo Geométrico. Definindo a variável aleatória com distribuição geométrica X: número total de peças observadas até que ocorra a primeira defeituosa, podemos escrever nosso modelo:

$P(X=k) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{k-1}$

Assim, podemos aplicar nosso modelo para calcular as probabilidades pedidas:

$P(X=1) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{0} = 0{,}01$

$P(X=2) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{1} = 0{,}0099$

$P(X=5) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{4} = 0{,}0096$

$P(X=10) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{9} = 0{,}0091$

$P(X=20) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{19} = 0{,}0083$

$P(X=40) = 0{,}01 \,.\, 0{,}99^{39} = 0{,}0068$

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 2

Por experiência, você sabe que a probabilidade de que você fará uma venda em qualquer telefone dado é 0,23. Encontre a probabilidade de que sua primeira venda ocorra na quarta ou na quinta ligação.

X: número da primeira ligação em que ocorre a venda (sucesso).

$P(X=4) = 0{,}23 \,.\, 0{,}77^{3} \cong 0{,}105003$

$P(X=5) = 0{,}23 \,.\, 0{,}77^{4} \cong 0{,}080852$

Logo, a probabilidade desejada é:

P(venda na 4ª ou 5ª ligação) = $P(X=4) + P(X=5) = 0{,}105003 + 0{,}080852 \cong 0{,}186$.

Embora um sucesso possa, teoricamente, nunca ocorrer, a distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidade discreta porque os valores de x podem ser listados – 1,2,3.... Perceba que conforme x se torna maior, P(X=x) se aproxima de zero. Por exemplo:

$P(X=50) = 0{,}23 \,.\, 0{,}77^{49} \cong 0{,}0000006306$.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

2. Esperança (ou média) da Distribuição Geométrica

Seja **X** uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro **p** (probabilidade de sucesso). A média ou esperança de X é dada por:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

3. Variância da Distribuição Geométrica

Nas mesmas condições que as apresentadas para a média, temos que a variância é dada por

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Observação: o **desvio padrão** é calculado como sendo a raiz quadrada da variância, assim como já estudamos anteriormente.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

Exemplo 3

Em uma indústria há uma máquina que é inspecionada todos os dias antes de os trabalhos serem iniciados. Por experiências anteriores, sabe-se que a probabilidade dessa máquina estar funcionando corretamente é de 90%. Caso haja algum problema, a produção não é iniciada e a máquina deve passar por uma revisão geral.

a) Qual é a probabilidade de que essa máquina funcione normalmente durante 15 dias e tenha que passar por uma revisão no 16º dia?
b) Qual a probabilidade de levarem pelo menos 5 dias até que aconteça a revisão geral?
c) Em média, a cada quantos dias ocorrerá uma revisão geral?

Resolução

Aqui temos uma distribuição geométrica. Como nosso interesse é de analisar o dia em que ocorrerá a primeira revisão, devemos definir como sendo sucesso o fato de ocorrer essa revisão geral. Sendo assim:

X: número de dias até que ocorra a primeira revisão.

E, portanto, temos que p = 0,10.

a) $P(X = 16) = 0{,}10 \,.\, (1 - 0{,}10)^{16-1} = 0{,}10 \,.\, 0{,}90^{15} = 0{,}0206$ ou 2,06%

b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) =$

$= 1 - [P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] =$

$= 1 - [0{,}10 \,.\, 0{,}90^0 + 0{,}10 \,.\, 0{,}90^1 + 0{,}10 \,.\, 0{,}90^2 + 0{,}10 \,.\, 0{,}90^3 + 0{,}10 \,.\, 0{,}90^4] =$

$= 1 - 0{,}40951 =$

$= 0{,}59049$ ou 59,049%

c) $E(X) = 1/0{,}1 = 10$

Logo, esperamos que as revisões ocorram, em média, a cada 10 dias.

Exemplo 4

O custo de realização de um experimento é de R$ 1.000,00. Se o experimento falha, um custo adicional de R$ 300,00 tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada prova é 0,2, se as provas são independentes e continuadas até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento?

Resolução

Vamos definir a variável aleatória X como sendo o número de experimentos até ocorrer o primeiro sucesso. Neste caso, p = 0,2. O número esperado de experimentos até a ocorrência do primeiro sucesso é dada por:

E(X) = 1/0,2 = 5 experimentos.

Isso significa que esperamos que ocorram 5 experimentos até que aconteça o primeiro sucesso. Ou seja, nos 4 primeiros ocorrem fracasso e no 5º ocorre sucesso.

O custo para realizar o experimento é de R$ 1000. Ou seja, como serão realizados 5 experimentos, teremos um custo de realização igual a R$ 5000. Porém, nos 4 primeiros experimentos ocorrerá falha, o que implica em um custo adicional de R$ 300 para cada experimento. Logo, teremos um custo adicional total de 4 . 300 = R$ 1200. Dessa forma, o custo total esperado será de 5000 + 1200 = **R$ 6.200,00**.

Clique na imagem ao lado e assista a **VÍDEO AULA** desse conteúdo no Canal Professor Guru

Clique na imagem ao lado para fazer o download dos **SLIDES** da vídeo aula

4. Exercícios

1) Considere uma variável aleatória X com distribuição Geométrica com parâmetro p=0,4. Calcule:

a) $P(X = 4)$.
b) $P(3 \leq X < 5)$.
c) $P(X \geq 2)$.

2) Uma moeda equilibrada é lançada sucessivamente, de modo independente, até que ocorra a primeira cara. Seja X a variável aleatória que conta o número de lançamentos **anteriores** à ocorrência de cara. Determine:

a) $P(X \leq 2)$.
b) $P(X > 1)$.
c) $P(3 < X \leq 5)$.

3) Suponha que a probabilidade de que você faça uma venda durante qualquer um dos telefonemas feitos é 0,19. Encontre a probabilidade de que você:

a) faça sua primeira venda durante a quinta ligação;
b) faça sua primeira venda durante a primeira, segunda ou terceira ligação;
c) não faça uma venda durante as três primeiras ligações.

4) Um produtor de vidro descobre que 1 em cada 500 itens de vidro está torcido. Encontre a probabilidade de:

a) o primeiro item de vidro torcido ser o décimo item produzido;
b) o primeiro item de vidro torcido ser o segundo ou terceiro item produzido;
c) nenhum dos dez primeiros itens de vidro estar imperfeito.

5) A duração, em centenas de horas, de uma lâmpada segue o modelo geométrico com parâmetro p = 0,7. Determine:

a) a probabilidade de uma lâmpada durar menos de 500 horas;
b) a probabilidade de uma lâmpada durar mais de 200 horas e menos de 400 horas;
c) a duração média de uma lâmpada.

Respostas

1) a) 0,0864 b) 0,2304 c) 0,6000
2) a) 0,875 b) 0,250 c) 0,047
3) a) 0,082 b) 0,469 c) 0,531
4) a) 0,002 b) 0,004 c) 0,980
5) a) 0,998 b) 0,019 c) 143 horas