

Variáveis aleatórias

1. Introdução

As distribuições de frequências de amostras foram tratadas anteriormente. Agora, trataremos das distribuições de probabilidades de populações. A distribuição de frequência de uma amostra é uma estimativa da distribuição de probabilidade da população correspondente. Se o tamanho da amostra for grande, espera-se que a distribuição de frequências da amostra tenha uma boa aproximação da distribuição de probabilidade da população.

No estudo de pesquisas empíricas e análises de situações reais, a Estatística Descritiva (tabelas de frequências, média, moda, mediana, desvio padrão, etc) são bastante úteis. Porém, no estudo de uma população, as distribuições de probabilidades, como veremos mais adiante, são preferidas, pois possibilitam a construção de modelos matemáticos que nos auxiliam na compreensão dos fenômenos do mundo real.

2. Variáveis aleatórias

Como já vimos no estudo das probabilidades, o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral. Os elementos desse conjunto podem ser numéricos ou não. Por exemplo, o número de filhos de um casal é um exemplo de conjunto numérico. Porém, o grau de escolaridade de um indivíduo é algo não numérico. Dessa forma, em muitas vezes, para podermos trabalhar probabilisticamente com uma variável não numérica, atribuímos valores para cada elemento do espaço amostral.

O resultado de um experimento de probabilidade geralmente é uma contagem ou uma medida. Quando isso ocorre, o resultado é chamado de **variável aleatória**.

Definição

Uma variável aleatória X representa um valor numérico associado a cada resultado de um experimento de probabilidade. A palavra *aleatória* indica que os valores assumidos por X são obtidos ao acaso.

Notação

Geralmente, as **variáveis aleatórias** são representadas por letras **maiúsculas** (X), enquanto que os **valores assumidos** por essas variáveis aleatórias são representadas por letras **minúsculas** (x). Dessa forma, se escrevermos $X=x$ queremos dizer que a variável aleatória X assume um valor numérico igual a x .

As variáveis aleatórias podem ser de dois tipos: discretas ou contínuas.

2.1. Variáveis aleatórias discretas

Uma variável aleatória é **discreta** se ela assume um número finito de valores ou assume um número infinito de valores numeráveis (contáveis). Podemos dizer que uma variável é discreta quando seus valores puderem ser listados.



Por exemplo: o número de ligações recebidas por dia em um escritório pode ser um valor igual a 0, 1, 2, 3, 4, ... Assim, definimos a variável aleatória X:

X: número de ligações recebidas pelo escritório.

Os valores que essa variável pode assumir são $x=0, 1, 2, 3, \dots$. Dessa forma, se escrevermos $X=3$ estamos dizendo que “o número de ligações recebidas pelo escritório (X) é igual a 3 ligações (x)”.

2.2. Variáveis aleatórias contínuas

Uma variável aleatória é **contínua** se ela possui um número incontável de possíveis resultados. Ou seja, uma variável é dita contínua quando os valores que ela pode assumir puderem ser representados como um **intervalo** na reta dos números reais. Neste caso, os valores assumidos por uma variável contínua, não podem ser listados, visto que são infinitos os possíveis valores dessa variável.

Por exemplo: consideremos o tempo de duração de uma ligação recebida em minutos (incluindo frações de minutos). Neste caso, podemos definir uma variável aleatória Y da seguinte forma:

Y: tempo de duração de uma ligação em minutos.

Perceba que os valores de **Y** podem assumir qualquer valor em um intervalo real. Suponhamos, para facilitar, que o tempo máximo de uma ligação seja de 120 minutos. Neste caso, os valores **y** pertencem ao intervalo $[0, 120]$.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula



3. Distribuições de probabilidades discretas

Para cada valor de uma variável aleatória discreta pode-se determinar uma probabilidade correspondente a esse valor. Ao listar cada valor de uma variável aleatória juntamente à sua probabilidade, você estará formando uma **distribuição de probabilidade**.

Uma distribuição de probabilidades deve satisfazer as seguintes condições:

I. A probabilidade de cada valor da variável é um número de 0 à 1. Ou seja:

$$0 \leq P(X = x) \leq 1 \text{ ou, ainda, } 0 \leq P(x) \leq 1.$$

II. A soma de todas as probabilidades é igual a 1:

$$\sum_i P(X = x_i) = 1, \text{ ou ainda, } \sum_i P(x_i) = 1.$$



Perceba que podemos trabalhar com dois tipos de notação: $P(X=x)$ ou simplesmente $P(x)$. Por exemplo, a probabilidade de a variável X assumir o valor igual a 3 pode ser escrita como $P(X=3)$ ou apenas $P(3)$.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 1

Um psicólogo aplicou um teste para classificar o nível de estresse dos 150 funcionários de uma empresa. Para isso, ele atribuiu cinco possibilidades: muito calmo, calmo, moderado, irritado, muito irritado. Essas características foram pontuadas com valores de 1 à 5, onde 1 indica a qualidade “muito calmo” e 5 indica “muito irritado”. Definindo a variável aleatória X : nível de estresse, podemos dizer que $x=1,2,3,4,5$. Os resultados da pesquisa estão na tabela a seguir:

x	frequência
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21
total	150

Construir uma distribuição de probabilidade para a variável X .

Resolução

Utilizando a tabela, podemos calcular as probabilidades:

$$P(X=1) = 24/150 = 0,16$$

$$P(X=2) = 33/150 = 0,22$$

$$P(X=3) = 42/150 = 0,28$$

$$P(X=4) = 30/150 = 0,20$$

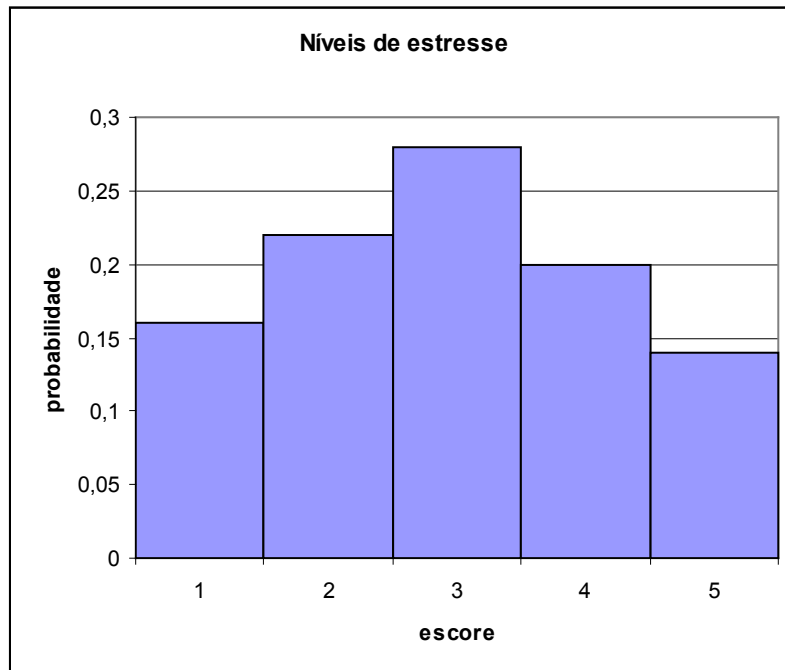
$$P(X=5) = 21/150 = 0,14$$

A distribuição de probabilidades está apresentada na tabela a seguir:

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$ ou $P(x)$	0,16	0,22	0,28	0,20	0,14



Graficamente, podemos representar da seguinte forma:



Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 2

Em uma cidade, a distribuição de probabilidade da variável que representa o número de dias de chuva ao longo de uma determinada semana é dada pela tabela:

Dias de chuva	Probabilidade
0	0,216
1	0,432
2	m
3	0,064

- defina a variável aleatória X ;
- calcule o valor m apresentado na tabela;
- determine $P(X=3)$;
- calcule $P(X<2)$;
- calcule $P(X\geq 2)$.



Resolução

a) X: número de dias da semana que chove em certa cidade.

b) A soma de todas as probabilidades deve ser igual a 1. Logo:

$$0,216 + 0,432 + m + 0,064 = 1$$

E, portanto, $m=0,288$.

c) $P(X=3) = P(3) = 0,064$

d) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,216 + 0,432 = 0,648$

e) Sabendo que $P(X<2) + P(X\geq 2) = 1$, temos que $P(X\geq 2) = 1 - 0,648 = 0,352$.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula

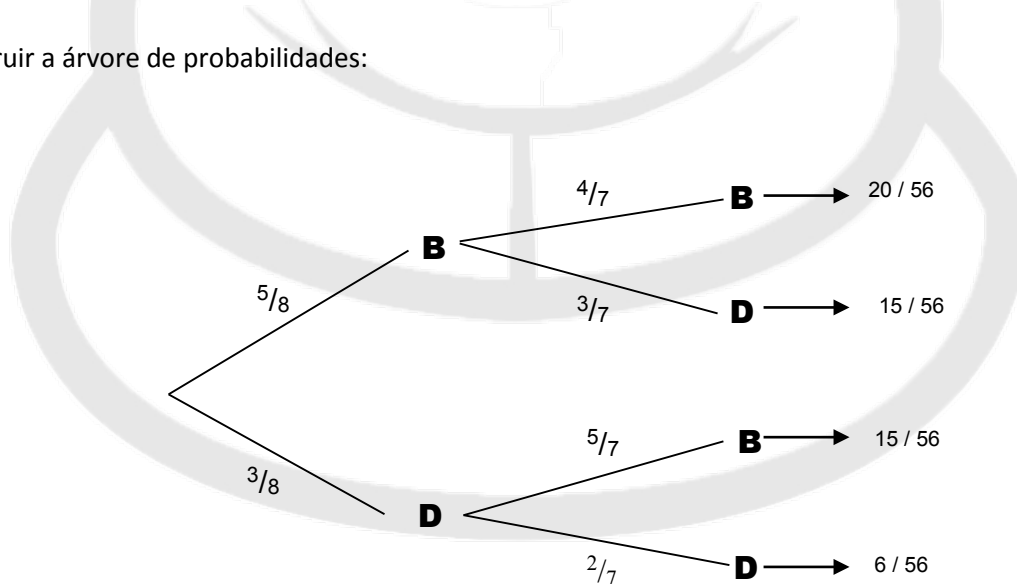


Exemplo 3

Em uma caixa há 5 peças boas e 3 defeituosas. Duas peças são retiradas ao acaso e sem reposição. Definindo a variável aleatória X como sendo o número de peças boas retiradas, obtenha a distribuição de probabilidades.

Resolução

Vamos construir a árvore de probabilidades:



Definindo:

X: número de peças boas retiradas.

Note que X poderá assumir valores iguais a 0, 1, ou 2. Logo, a distribuição de probabilidades será dada pela tabela:



x	0	1	2
P(X=x)	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
 Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
 download dos **SLIDES** da vídeo aula



4. Valor Esperado ou Média de uma variável aleatória discreta

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores x_1, x_2, \dots, x_k . O **valor esperado** de X (ou **esperança matemática** de X), ou simplesmente a **média** de X é definida como:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(x_i)$$

Já vimos que a média amostral é dada por $\bar{x} = \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i$. A média teórica (ou populacional) μ é semelhante à média amostral \bar{x} . À medida que o tamanho da amostra aumenta, a frequência relativa f_i aproxima-se de $p(x_i)$, ou seja, a média amostral aproxima-se da média populacional.

Observação: embora as probabilidades nunca possam ser negativas, o **valor esperado** de uma variável aleatória **pode ser negativo**.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
 Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
 download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 4

Considere um jogo no qual se lançam três moedas não viciadas e se recebe R\$ 2,00 caso apareça 1 cara, R\$ 4,00 se aparecerem 2 caras e R\$ 8,00 caso apareçam 3 caras. Se nenhuma cara ocorrer, nada se recebe. Quanto se esperaria ganhar caso fizesse esse jogo uma vez? Em outras palavras: qual é o valor esperado de uma jogada?

Inicialmente, fazendo o estudo das probabilidades (como a construção de uma árvore de probabilidades, por exemplo), verificamos que a probabilidade de ocorrer um certo número de caras é dada pela tabela:



N° caras	Probabilidade
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$

Se definirmos a variável aleatória X: valor a ser recebido, podemos construir a distribuição de probabilidades de X, conforme tabela a seguir:

N° caras	0	1	2	3
x_i : valor a ser recebido (R\$)	0	2	4	8
Probabilidade: $P(X=x_i)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

A esperança (ou valor esperado) será:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} = \frac{26}{8} = R\$ 3,25.$$

O valor esperado é uma média a longo prazo. No caso, após várias jogadas, se esperaria ganhar R\$ 3,25.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula



Exemplo 5

Em um sorteio, 1500 bilhetes são vendidos a R\$ 2,00 cada. Serão 4 prêmios sorteados nos valores de R\$ 500, R\$ 250, R\$ 150 e R\$ 75. Você compra um bilhete. Qual o valor esperado do seu lucro?

Resolução

Para encontrar o lucro para cada prêmio, devemos subtrair o valor do prêmio do valor pago pelo bilhete. Assim, para o prêmio de R\$ 500, temos um lucro igual a R\$ 500 – R\$ 2 = R\$ 498. E assim por diante para os demais prêmios. Definindo a variável aleatória discreta X: lucro em reais, construímos a distribuição de probabilidades:

Lucro em reais(x)	498	248	148	73	-2
$P(X=x)$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1}{1500}$	$\frac{1496}{1500}$

Agora, calculamos o valor esperado:

$$E(X) = 408 \cdot \frac{1}{1500} + 248 \cdot \frac{1}{1500} + 148 \cdot \frac{1}{1500} + 73 \cdot \frac{1}{1500} + (-2) \cdot \frac{1496}{1500} = -1,35$$



Logo, como o valor esperado é negativo, você espera perder uma média de R\$1,35 por cada bilhete que comprar.

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos **SLIDES** da vídeo aula



5. Variância e desvio padrão de uma variável aleatória discreta

Como já estudamos, a variância é uma medida de dispersão que avalia o grau de homogeneidade dos valores da variável em torno da média. A definição da variância de uma variável aleatória discreta X é dada por:

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(x - \mu)^2]$$

Desenvolvendo o quadrado da diferença, obtemos uma fórmula prática para o cálculo da variância:

$$\sigma^2(X) = Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

onde:

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \cdot P(x_i)$$

e

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot P(x_i)$$

Cuidado

Não confunda: $E^2(X) = [E(X)]^2$ que é diferente do valor de $E(X^2)$.

O desvio padrão da variável X corresponde à raiz quadrada da variância:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)} \text{ ou ainda } DP(X) = \sqrt{Var(X)}.$$



Exemplo 6

Uma loja possui a seguinte distribuição de vendas de geladeiras por semana:

x_i (vendas)	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,20	0,30	0,30	0,15	0,05

Calcular o valor esperado de X : número de vendas por semana e o desvio padrão de X .

Utilizando a fórmula para a esperança:

$$E(X) = 0 \cdot 0,20 + 1 \cdot 0,30 + 2 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,05 = 1,55 \text{ geladeiras.}$$

Vamos calcular a variância. Para isto, precisamos determinar, antes, o valor de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,20 + 1^2 \cdot 0,30 + 2^2 \cdot 0,30 + 3^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,05 = 3,65.$$

Utilizando a fórmula da variância:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3,65 - (1,55)^2 = 1,25$$

O desvio padrão será:

$$DP(X) = \sqrt{1,25} = 1,12 \text{ fogões.}$$

Clique na imagem ao lado e assista a
VÍDEO AULA desse conteúdo no Canal
Professor Guru



Clique na imagem ao lado para fazer o
download dos SLIDES da vídeo aula



6. Exercícios

1) Seja X a variável aleatória correspondente à soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados. Determine:

- a distribuição de probabilidades de X ;
- $P(3 \leq X \leq 10)$;
- $P(X > 7)$;
- $P(X \leq 5)$.

2) Uma variável aleatória tem a distribuição de probabilidade dada pela seguinte fórmula:

$$P(x_i) = K/x \quad \text{para } x = 1, 3, 5, 7.$$

- Determinar K .
- Calcular $P(2 \leq X \leq 6)$.



3) Um vendedor calcula que cada contato resulta em venda com probabilidade de 20%. Certo dia, ele contata dois possíveis clientes. Construa a tabela de distribuição de probabilidade para a variável Y: número de clientes que assinam um contrato de venda.

4) Uma variável aleatória discreta pode assumir cinco valores, conforme a distribuição de probabilidade:

x_i	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,20	0,25	?	0,30	0,10

- Encontre o valor de $P(3)$.
- Calcule a média da distribuição.
- Calcule a variância e o desvio padrão de X.

5) A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X é dada pela fórmula:

$$P(x) = (0,8) \cdot (0,2)^{x-1} \text{ para } x=1,2,3,\dots$$

- Calcular $P(x)$ para $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$ e $x=5$.
- Some as probabilidades obtidas no item a. O que você pode dizer a respeito das probabilidades para valores de x maiores que 5?

6) O número de chamadas telefônicas recebidas por uma central e suas respectivas probabilidades para um intervalo de um minuto são:

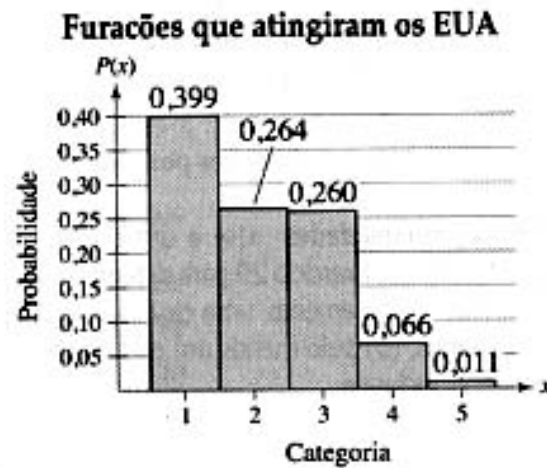
Nº de chamadas	0	1	2	3	4	5
Probabilidades	0,55	0,25	0,10	0,04	0,04	0,02

- Determinar $P(1 \leq X \leq 4)$ e $P(X > 1)$.
- Qual é o número esperado de chamadas em um minuto?
- Lembrando que o coeficiente de variação é o quociente entre o desvio padrão e a média, calcule o coeficiente de variação de X.

7) De acordo com uma pesquisa do *Data Journal*, 70% das pessoas que trabalham em escritórios utilizam computadores da IBM. Se dois indivíduos que trabalham em escritórios são selecionados ao acaso, encontrar a distribuição de probabilidades da variável X: número de usuários dos computadores da IBM. Calcule a média e o desvio padrão dessa variável.

8) O gráfico mostra a distribuição de furacões que atingiram o território dos EUA divididos por categorias, sendo 1 o nível mais fraco e 5 o mais forte.





Para essa variável, calcule:

- a esperança;
- a variância;
- o desvio padrão.

9) O gráfico mostra a distribuição de probabilidades do número de pessoas que moram em cada casa nos EUA:



Para essa variável, calcule:

- a esperança;
- a variância;
- o desvio padrão.

10) Em um jogo de roleta americana, há 38 números: 00, 0, 1, 2, 3, ..., 36 marcados em espaços igualmente divididos. Se um jogador aposta \$ 1 em um número e ganha, ele continua apostando com o \$ 1 e recebe \$ 35 adicionais. Caso contrário, ele perde \$ 1. Definindo a variável X : lucro obtido em uma rodada, determine a quantidade média de dinheiro, por jogo, que esse jogador pode esperar perder (e não ganhar, visto que se trata de um jogo de azar).



Respostas

1) a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

b) 8/9

c) 5/12

d) 5/18

2) a) $K = 105/176$ b) 7/22

3)

y_i	0	1	2
$P(y_i)$	0,64	0,32	0,04

4) a) 0,15 b) 2,85 c) 1,7275 e 1,31

5) a)

x_i	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,00128

b) A soma das probabilidades é 0,99968. logo, as probabilidades para valores maiores que 5 são próximas de zero.

6) a) 0,43 e 0,20 b) 0,83 d) CV = 145,8%

7)

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	0,09	0,42	0,49

$\mu(X) = 1,40$

$\sigma(X) = 0,65$

8) a) 2,0 b) 1,0 c) 1,0

9) a) 2,5 b) 1,9 c) 1,4

10) \$ 0,05

Site: <http://www.professorguru.com.br>

Facebook: <http://www.facebook.com/professorguru>

Canal Professor Guru no Youtube: <http://www.youtube.com/c/professorguru>

